L. B. Monastir	Série n : 3	4 ^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Nombres Complexes + Continuité et limites + …		

Exercice 1 *Vrai - Faux*

1/ Soit $g\,:\,x \mapsto \dfrac{2x-3}{x+2}$. On a $g([-5,-1])=\left[g(-5),\ g(-1)\right]$ ☐

2/ On donne le tableau de variation d'une fonction f

L'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet deux solutions dans IR. ☐

3/ On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\cos^2 x - 1)}{x^2} = -1$. ☐

Exercice 2 QCM

Choisir la phrase correcte.

1/ La fonction $f\,:\,x \mapsto \dfrac{\sin 2x}{x}$

a) est définie sur IR **b**) est continue en 0

c) est prolongeable par continuité en 0

2/ Soit $f\,:\,x \mapsto 5x - \sin x + 3$ et a est un réel

a) $f\left(\left[a,\ a+1\right]\right) = \left[f(a),\ f(a+1)\right]$ **b**) $f\left(\left[a,\ a+1\right]\right) = \left[f(a+1),\ f(a)\right]$

3/ La solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ est

a) *dans* $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$ **b**) *dans* $\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right]$ **c**) *dans* $\left[\dfrac{3}{4}, 1\right]$

Exercice 3

1/ Etudier la continuité de la fonction f définie sur IR par
$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} + x$.

2/**a**- Montrer que l'équation f$(x) = 0$ n'a pas de solution dans IR.

b- Préciser le signe de f(x) pour x de IR.

3/**a**- Montrer que D: y=1 est une asymptote à la courbe (C) de f au au voisinage de $-\infty$.

b- Prouver que (C) est au dessus de D.

4/ Drésser le tableau de variation de f.

5/ Prouver que la courbe de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique que l'on précisera.

Exercice 4

Soit $f\,:\,IR \to IR\ ;x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & si\ x \le 0 \\ \dfrac{2\sin x}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

1/**a**) Montrer que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[$ on a : $\dfrac{-2}{x} \le f(x) \le \dfrac{2}{x}$.

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/**a**- Montrer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$

b- *Montrer que* $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) + 2x) = 0$

3/ Prouver que f est continue en 0.

4/ Préciser $f\left(]-\infty,\ -1]\right)$.

Exercice 5

Soit la fonction f : $IR \mapsto IR;\ x \mapsto \begin{cases} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

1/a- Vérifier que $\forall x \neq 0;\ f(x) = \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

b- Montrer alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

2/a- Vérifier que $\forall x < 0;\ f(x) = -f(-x)$

b- Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3/a- Montrer que pour tout $x \neq 0;\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 2x^2$.

b- f est-elle continue en 0?

4/a- Montrer que $\forall x \neq 0;\ \left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant 2|x|$.

b- Prouver que f est dérivable en 0 et intérpréter le résultat géométriquement.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}x^2 + 2003$.

1/a- Vérifier que $\forall x > 0; f(x) \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2004$

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}$f(x).

2/a- Montrer que $\forall x > 0;\ \dfrac{f(x)}{x} \leq -\frac{1}{2}x + \dfrac{2004}{x}$.

b- Déduire que la courbe de f possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3/ Etudier la parité de f.

4/ Soit la fonction g : $[0;+\infty[\to IR; x \mapsto -\sin x - x$

a- Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra penser à un thérème de limite et ordre).

b- Dresser le tableau de variation de g.

c- Déduire la signe de $g(x)$ pour tout $x \geq 0$.

5/ Dresser le tableau de variation de f sur IR$^+$ puis sur IR.

6/ L'équation $f(x) = 2005$ possède-t-elle de solution?

Nombres complexes

Exercice 1 Vrai - Faux

1/ $i^{2010} = -1$ ☐

2/ Si $M(-1+7e^{i\theta})$ avec $\theta \in IR$ alors M appartient au cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 7. ☐

Exercice 2 QCM

Choisir la réponse correcte.

1/ **A**$(3i)$, $B(2-i)$ et $C(3+2i)$. On a : le triangle ABC est

a) équilatéral **b**) non isocèle **c**) isocèle rectangle.

2/ x est un réel. $e^{-ix} - e^{ix} =$

a) $2\cos x$ **b**) $-2i\sin x$ **c**) $2i\sin x$.

3/ *Soit* $\theta \in]\pi, 2\pi[$, la forme exponentielle de $z = \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ est

a) $-2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$ **b**) $2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ **c**) $2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Exercice 3

Soient $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -1 + i$ et $z_3 = \left(-\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$

1/ Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2/**a**) Vérifer que $z_3 = z_1 \times z_2$.

b) Déduire alors la forme trigonométrique de z_3.

c) Trouver donc $cos\frac{11\pi}{12}$ et $sin\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthononal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Désignons par A et B les points du plan d'affixes respectivess 3 et $2i$. A tout oint M(z) tel que $z \neq 3$ on associe $z' = \frac{z-2i}{z-3}$

1/ Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[AB]$

2/ Soit F l'ensemble des points M(z) tels que $|z'| = 1$

Prouver que F est la médiatrice du segment $[AB]$.

3/ Soit E l'ensemble des points M(z) tel que z' est un imaginaire.

a- Montrer que M$(z) \in E$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$ et $M \neq A$

b- En déduire E.

Exercice 5

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

Soient les points $A(-2+i)$ et $B\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Soit $f : z \mapsto f(z) = \frac{z+2-i}{2iz+i}$.

1/ Déterminer le domaine de définition D de f.

2/ Soit l'ensemble $E = \{M(z)$ tels que $f(z)$ est réel $\}$

a- Soit $z \in$ D et désignons par M le point d'affixe z

Vérifier que $f(z) = \frac{-i}{2} \times \frac{z-(-2+i)}{z+\frac{1}{2}}$

b- Déterminer enfin E.

3/ Soient . Soit $F = \{M(z) \in P$ tel que $|f(z)| = \frac{1}{2}\}$.

a- Montrer que point M(z) on a $|2iz+i| = 2.MB$

b- Déduire que F est la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 6

Pour $\theta \in]0,\pi[$ on considère l'équation

$$(E_\theta) : z^2 - (1+2\cos\theta)z + 1 + e^{i\theta} = 0$$

1/**a**- Vérifier que $z' = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ).

b- Déterminer alors l'autre solution z'' de (E_θ).

2/ Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A(1)$, $M'(z')$ et $M''(z'')$.

a- Exprimer en fonction de θ le nombre complexe $\frac{z''-1}{z'}$

b- Déterminer θ pour que $\overrightarrow{AM''}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{OM'}$.

3/ Montrer que pour tout $\theta \in]0,\pi[$ le point $M''(z'')$ varie sur un cercle que l'on caractérisera.

Exercice 7 bac

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

2/ Soit θ un réel. On considère l'équation

$$(E_\theta) : z^2+(1-2e^{i\theta})z - 2e^{i\theta} = 0$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ). On désignera par z_1 la solution indépendante de θ et par z_2 l'autre solution.

3/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives z_1 et z_2.
Soit I le milieu de $[AM]$. On désigne par z_I l'affixe de I.

a- Vérifier que pour tout réel θ, $z_I + \frac{1}{2} = e^{i\theta}$.

b- Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.

c- Déterminer les valeurs de θ dans l'intervalle $[0,2\pi[$ pour lesquelles les points O,A et I sont alignés.

Exercice 8 (d'après un devoir)

Soit $\theta \in]0,\pi[$. On donne dans le plan complexe muni d'un RON direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points $A(-2)$, $M_1(z_1 = -1 + e^{i\theta})$ et $M_2(z_2 = -1 - e^{i\theta})$

1/ Mettre sous forme exponentielle z_1 et $\frac{z_1}{z_2}$.

2/**a**- Montrer que les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fix I que l'on déterminera.

b- Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M_1 quand θ varie.

c- En déduire l'ensemble Γ_2 des points M_2 quand θ varie.

3/ Montrer que OM_1AM_2 est un rectangle puis déterminer la valeur de θ pour laquelle on obtient un carré.

Exercice 9 bac

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1/ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2/ Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,
On considère les points A et B d'affixes respectives $1 + ia$ et $1 - ia$.
On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels.

a- Montrer que les points O,A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.

b- Mq les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a|=1$

3/ On suppose $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

a- Vérifier que $\forall x \in IR$; $1+e^{ix}=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$ et $1-e^{ix}=-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}$

b- En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes $1 + ia$ et $1 - ia$.

c- Déterminer a pour que les points O,A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice 10 bac 2001 s. principale

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où $a \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$
Soit f :P$\backslash\{B\}$ →P;$M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-a}{z-1}$.

1/ Montrer que les affixes des points invariants par f sont les solutions de l'équation **E** : $z^2 - 2z + a = 0$.

2/**a**- On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$. Résoudre **E**.

b- Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de **E**.

3/ Dans cette question on suppose a=-1. Soit $M(z) \in$P$\backslash\{B\}$ et $M'(z')$

a- Montrer que $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)} + \widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)} \equiv 0 \quad [2\pi]$.
En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BM'}\right)$.

b- Montrer que z' est un imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c- En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé du point B.