L. B. Monastir	**Série n : 7**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Limite - continuité +...		

Exercice 1

$f : x \mapsto -x^3 - x^2 - 2x + 2$. C_f est le courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ Dresser le tableau de variation de *f*.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter les résultats trouvés graphiquement

3/a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left[\frac{1}{2};1\right]$

b- Prouver que α est l'unique solmution dans IR.

c- Donner le tableau de signe de f(x) en fonction de α

4/ Par la méthode de déchotomie donner un encadrement de α à 0,125 près.

Exercice 2

On utilisant le tableau de variations si dessous d'une fonction f ; répondre au questions suivantes

1- Déterminer le domaine de définition de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2- Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\sqrt{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(-1+\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{-1}{x^2+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{1}{f(x)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x^2}{2+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)+3}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{f(x)+3}$

3- Déterminer les images des intervalles suivantes par f

$]-\infty,-1]$; $]-1,0[$; $]-\infty,0[$; $]0,+\infty[$

EXERCICE 3

La figure 2 si contre désigne la courbe représentative d'une fonction f Ainsi que ces asymptotes

On utilisant la figure déterminer :

1- le domaine de définition de f

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

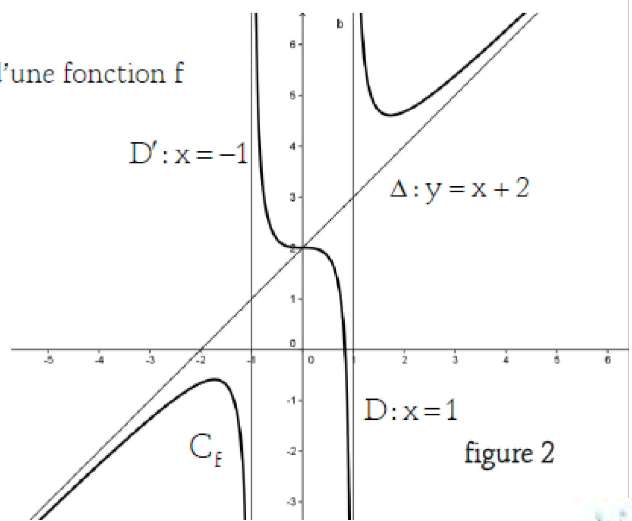

figure 2

Exercice 4

..

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1/ Déterminer le domaine de définition I de f.

2/ Etudier la parité de f.

3/ Vérifier que $\forall x \in]1;+\infty[;\ f'(x) = \dfrac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$

4/ Déterminer f$(]1;+\infty[)$.

5/ Dresser le tableau de variation de f sur $]1;+\infty[$ puis tracer C_f la courbe de f dans un repère orthonormé .

6/ Soit la fonction g: x $\mapsto f(x) - x^2,\ \forall x \in]1;+\infty[$

a- Calculer g(2) et g$(1,1)$. $1,1904$

b- Montrer que g$(]1;+\infty[) = IR$.

c- Prouver que l'équation f$(x) = x^2$ admet une seule solution dans $]1;+\infty[$.

Exercice 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-x+4}+x-2}{|x|} & si\ x \neq 0 \\ \dfrac{3}{4} & si\ x = 0 \end{cases}$

1/**a**- Montrer que $\forall x \prec 0;$ f$(x) = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}} - 1 + \dfrac{2}{x}$

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),$ puis interpréter géométriquement le resultat.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),$ puis interpréter géométriquement le résultat.

3/ Etudier la continuité de f à droite en 0.

4/ Soit $h : \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \to IR; x \mapsto h(x) = f(\cos x)$.

Etudier la continuité de g à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 6

d'après un devoir

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & si\ x \in]-\infty,0] \\ f(x) = x^3+2+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si\ x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)+2x]$.

2/**a**- Mntrer que $\forall x \succ 0;\ x^3+2-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^3+2+x^2$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c- Montrer que f est continue en 0.

3/**a**- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

b- Montrer que f est bornée sur $\left[-4;\ -2\right]$.

c- Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty,0]$ par f.

d Montrer que l'équation f$(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in]-1,0[$

e- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 7 — *d'après un devoir* (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ f(x) = \dfrac{x^2 \sin\frac{2}{x}}{x+1} & \text{si } x \in]0;+\infty[\end{cases}$

a) Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[;\ |f(x)| \leqslant x^2$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

d) Montrer enfin que f admet un prolongement par continuité en 0.

2/ Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x) = f\left(-\sqrt{1+x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $]-1;+\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = -\dfrac{1}{4}$ admet au moins une solution dans]0;1[.

Exercice 8 ♦

Soit f la fonction définie IR\ $\{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\dfrac{\pi}{x^2} & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ f(x) = \dfrac{x^2(\sqrt{x}-1)}{-x^2-x+2} & \text{si } x \in [0;+\infty[\setminus\{1\} \end{cases}$$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

2)**a**- Encadrer $f(x)$ pour $x \in]-\infty,0[$.

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ puis montrer que f est continue en 0.

3) f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

4) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{5}{2}$ admet au moins une solution dans $\left[-\sqrt{3};-\sqrt{2}\right]$

5)**a**- Montrer que si : $a \prec b \leqslant -\sqrt{\pi} \Rightarrow f(a) \succ f(b)$.

b- Déterminer $f(]-\infty,-4])$.