L. B. Monastir	**Série n : 8**	$4^{ème}$ Math
P.P. : Ali Zouhaïer		Séance n : 1
Chapitre : Nombres Complexes + Limite - Continuité +…		

Exercice 1 D'après un devoir

I-**1**/ Déterminer les racines carrées de 3+4i.

2/ Soit $(E)\ :\ iz^2+iz+(i-1)=0$

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b- Ecrire sous forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

II/ Soit $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose

$$(E_\theta)\ :\ iz^2+e^{2i\theta}z+i(e^{2i\theta}+1)=0$$

On note z' et z" les solutions de l'équation (E_θ).

1/**a**- Montrer que $e^{2i\theta}+1=2\cos\theta.e^{i\theta}$.

b- Sans calculer z' et z"; calculer $z'\times z''$ puis montrer que

$\arg(z')+\arg(z'')\equiv\theta\quad[2\pi]$

c- Montrer que $\arg\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{z''}\right)\equiv\theta+\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

d- Déterminer la valeur de θ pour que z'+z"=-1.

2/**a**- Calculer $(e^{2i\theta}+2)^2$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

III- Soit P le plan complexe rapporté à un repèr orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit les points A et M d'affixes respectives $z_A=-i$ et $z_M=i(1+e^{2i\theta})$.

1/**a**- Ecrire z_M sous forme exponentielle (utiliser **II**-**1**/**a**-)

b- Exprimer OM en fonction de θ.

c- Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OAM soit isocèle en O.

2/ Déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 2

1/**a**- Montrer que $a=e^{i\frac{2\pi}{9}}$ est une solution de l'équation $(E)\ :\ z^9=1$.

b- Exprimer les solutions de (E) en fonction de a.

2/ Soit θ un réel tel que $1+e^{i\theta}\neq0$. Donner la forme algébrique de $\frac{i-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

3/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E')\ :\ (i+z)^9=(1+z)^9$.

Exercice 3 Bac

1)**a**- Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$z^2-\sqrt{3}z+1=0$

b- Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

c- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4-\sqrt{3}z^2+1=0$.

2/ Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

a- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z^2-(2\sin\theta)z+1=0$

Vérifier que $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ et $e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ sont les solutions de (E).

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4-(2\sin\theta)z^2+1=0$.

Exercice 4

Soit la fonction f: $x\mapsto x^4-6x^2+x;\forall x\in[0;4]$

1/a- Dreser le tableau de variation de f' la fonction dérivée de f.

b- Déterminer le nombre de solution de l'équation $f'(x)=0$

c- Donner un encadrement d'amplitude 0.5 de chaque solution

d- Donner le tableau de signe de f'(x)

2/a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Donner le nombre de solution de l'équation f$(x) = 0$.

Exercice 5

Soit f : $[0;1] \rightarrow [0;1]$ une fonction continue.

1/ Montrer que f à un point fixe (c'est à dire il existe c $\in [0;1]$ tel que f$(c) = c$.

2/ Montrer qu'il existe un réel a dans $[0;1]$ tel que f$(a) = a$.

3/ On suppose que f$(0) = 0$ et f$(1) = 1$. Montrer qu'il existe b dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ tel que f$\left(b + \frac{1}{2}\right) - f(b) = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

1- Soit $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0) = f(2)$

Montrer qu'il existe c dans $[0,1]$ tel que $f(c) = f(c+1)$

2- Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** vérifiant $f(0) = f(1)$

Montrer qu'il existe c dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$

Exercice 7 d'après un devoir

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & si\ x \in]-\infty, 0] \\ f(x) = x^3 + 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

1/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x]$.

2/a- Mntrer que $\forall x \succ 0;\ x^3 + 2 - x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^3 + 2 + x^2$

b- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c- Montrer que f est continue en 0.

3/a- Montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

b- Montrer que f est bornée sur $[-4; \ -2]$.

c- Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 0]$ par f.

d Montrer que l'équation f$(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in]-1, 0[$

e- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 8 *d'après un devoir* (légèrement modifié)

1/ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = \dfrac{x^2 \sin\frac{2}{x}}{x+1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$

a) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[;\ |f(x)| \leqslant x^2$.

b) En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$

d) Montrer enfin que f admet un prolongement par continuité en 0.

2/ Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par g$(x) = f\left(-\sqrt{1+x}\right)$.

a) Montrer que g est continue sur $]-1; +\infty[$.

b) Montrer que l'équation g$(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans]0;1[.