Isométries – Déplacements – Antidéplacements

Mr : AMMAR BOUAJILA **$4^{ème}$ MATHS**

EXERCICE N°1 BAC P 2003

ABC un triangle rectangle en C tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ et soit r une rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient D=r(C) et E=$r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1/a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = D$ et f$(C) = A$.

b- Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $g = f \circ r$.

a- Montrer que g est une translation.

b- Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c- Montrer que les points C,A et F sont alignés.

3/ Soit G=$t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

b- Montrer que φ est une glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

EXERCICE N°1 BAC C 2000

Dans le plan orienté, ABC est un triangle tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, la lettre O désigne le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices de ce triangle. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient : $CP = BQ = BC$.

1/a- Montrer que (CI) est la médiatrice de $[PB]$ et que (BI) est la médiatrice de $[CQ]$.

b- Montrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{CP}; \overrightarrow{QB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

2/ Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B

a- Montrer que f a pour centre I et que $\frac{2\pi}{3}$ est une mesure de son angle.

b- Montrer que $\widehat{\left(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} \quad [2\pi]$

c- Montrer que les points I, P et Q sont alignés.(on pourra calculer $\widehat{\left(\overrightarrow{IP}; \overrightarrow{IQ}\right)}$).

3/ On pose $O_1 = f(O)$ et $O_2 = f(O_1)$

a- Montrer que $f(O_2) = O$

b- En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g = f \circ r \circ f$.

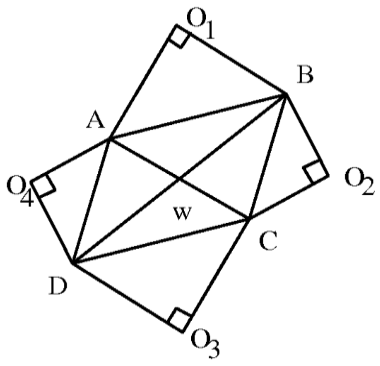
a- Montrer que g est une translation.
vérifier que $g(O_2) = O_1$. En déduire le vecteur de translation

b- Montrer que $r(B) = C$. En déduire que $g(P) = Q$.

c- Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°1 BAC P 96

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre w et les triangles ABO_1, BCO_2, CDO_3 et DAO_4 sont des triangles rectangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4. On suppose que le plan est orienté et que $\widehat{\left(\overrightarrow{O_1A},\overrightarrow{O_1B}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.



On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre respectifs O_1, O_2, O_3 et O_4.

1)a- Déterminer $(R_2oR_1)(A)$; $(R_3oR_2)(B)$ et $(R_4oR_3)(C)$.

b- Montrer que les applications R_2oR_1, R_3oR_2, R_4oR_3 sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désigne par f.

2)a- Montrer que $R_3(R_2(O_1))=R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$

b- Montrer que $f(O_2)=O_4$.

c- Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?

3) Soit D la médiatrice du segment [AB] et S_D la symétrie orthogonale d'axe D. On pose $g=R_2oS_D$.

a- Déterminer $g(A)$ et $g(O_1)$

b- Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g.

EXERCICE N°4 BAC P 92

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral IBC tel que $\widehat{\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I et de rayon IB et par H le milieu de $[BC]$. La demi-droite $[HI)$ coupe le cercle $(\mathcal{C})$ au point A. Soit A' le symétrique de A par rapport à la droite (CI).

1/a- Montrer que A'C=AB.

b- Soit R la rotation qui transforme B en C et A en A'. Déterminer son centre et une mesure de son angle.

2/ La droite (CI) recoupe le cercle $(\mathcal{C})$ au point D. On désigne par $S_{(BD)}$ et $S_{(AH)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (DB) et (AH). On pose $f = S_{(AH)} \circ S_{(BD)}$ et $I' = S_{(BD)}(I)$.

a- Montrer que les droites (DB) et (AH) sont parallèles.

b- Déterminer $f(B)$ et $f(I')$.

c- Donner la nature de f. Caractériser f.

d- En déduire que I' appartient à $(\mathcal{C})$.

3/ Soit A" l'image de A' par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

a- Montrer que les droites $(A'B)$ et (AC) sont parallèles.

b- En déduire que A'' appartient à (AC).

c- Montrer que $I'A' = AA''$.

4/ Soient J et K les milieux respectifs de $[AA']$ et $[I'A'']$.

a- Montrer que les droites (JK) et (AI) sont parallèles.

b- Montrer qu'il existe un antidéplacement unique g tel que $g(A')$=A *et* $g(I) = A'$.

c- montrer que $g(K) = J$.

d- Montrer que g n'a pas de points invariants.

e- Donner la décomposition canonique de g.