Série n°12

Exercice n°1

Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$. (ζ) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I/ 1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à (ζ).

b) Tracer la courbe (ζ).

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe (ζ') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II/ Soit g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = f^{-1}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$.

1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$; $g(x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

2) Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[1, +\infty[$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.

Exercice n°2

On donne dans le plan orienté P, un carré ABCD de centre O et tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par : r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Ω le point d'intersection des bissectrices intérieurs du triangle ABD.

1/ On pose $f = r' \circ r$.

Montrer que f est une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.

2/ Soit A' le point du segment [BD] tel que DA' = DA.

Montrer que $\Omega A = \Omega A'$ et que $(\Omega A') \parallel (AB)$.

3/ Soit Δ la perpendiculaire à (BD) en D. Δ coupe $(\Omega A')$ en C'.

Déterminer $f[(AC)]$, $f[(AB)]$ et $f[(BC)]$. En déduire que $C' = f(C)$.

4/ Montrer que le quadrilatère ΩCDC' est un losange.

5/ a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement g tel que g(B) = D et g(C) = C'.

b) Construire le point O' = g(O).

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice n°3

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1/ a – Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A.

b – Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2/ Soit $g = f \circ r$.

a – Montrer que g est une translation.

b – Soit F = g(E). Monter que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

c – Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3/ Soit $G = t_{\overrightarrow{AD}}(I)$ où $t_{\overrightarrow{AD}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a – Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C) = D$ et $\varphi(I) = G$.

b – Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.