Série n°16

Exercice n°1

On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \;, n \in \mathbb{N}$.

1) a) Calculer U_1.
   b) calculer $U_1 + U_3$; En déduire la valeur de U_3
2) Montrer que pour tout $, n \in \mathbb{N}$: $U_n \geqslant 0$.
3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire quelle est convergente.

Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n

Exercice n°2

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\,dx$.

1/a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$
   b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante
   c) En déduire que (I_n est une suite convergente

2/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$
   b) En déduire la limite de la suite (I_n)

3/ Calculer I_1 , I_2 et I_4

Exercice n°3

Soit dans le plan orienté un rectangle directe ABCD de centre O tel que AB = 2AD .

1) On désigne par f la similitude directe vérifiant : f(A) = B et f(B) = C .
   a) Déterminer le rapport et l'angle de f .
   b) Soit Ω le centre de f . déterminer la nature et les éléments caractéristiques de fof .

2) a) Déterminer fof(A) .
   b) En déduire une construction simple de Ω .

3) Soit D' = f (D) .Montrer que : $\overrightarrow{BD'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

4) On not e Δ la médiatrice de [AD] et on pose g = $S_\Delta o h_{(A,2)}$.
   a) Montrer que g est une similitude indirecte et déterminer son rapport .
   b) Soit I le point tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et I' = I*D . Préciser g(I) . Que peut on conclure ?
   c) Préciser g(A) puis montrer que l'axe de g est la médiatrice de [AI'] .

5) On pose h = f o g .
   a) Préciser h (A) et h (O) .
   b) Montrer que h est une symétrie glissante puis déterminer sa forme réduite .