Série n°02

EXERCICE N°1

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application de P-{o} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z'= $\frac{z^2-9}{2z}$). On désigne par A(3i) et par B(-3i)

1- a) Déterminer les point invariant par f
   b) Montrer que z' est imaginaire pur ⇔ M', A et B sont alignés
   c) Montrer que si $z \neq 3i$ alors on a: $\frac{z'+3i}{z'-3i} = \left(\frac{z+3i}{z-3i}\right)^2$
   d) Déduire que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$. En déduire l'ensemble des points M si z' est imaginaire pur

2- Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

   a) Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes z1 et z2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécidents de M'(3isinθ) par f.
   b) Montrer que A, B, M_1 et M_2 sont situés sur le même cercle que l'on précisera
   c) Préciser la nature du triangle BM_1M_2

EXERCICE N°2

Soient les nombres complexes suivants

$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 1-i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1- Ecrire z_1, z_2 et Z sous forme trigonométrie
2- a) Pour n un entier naturel non nul donner la forme trigonométrique Z^n
   b) Trouver le plus petit entier n non nul pour que Z^n soit réel
3- Ecrire Z sous forme algébrique
4- En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$

EXERCICE N°3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ on désigne parA, A', M et M' les points d'affixes respectives:2,-2, z et z'= $\frac{z^2+1}{z}$.

1- a) Vérifier que $1+e^{i\alpha} = 2\cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}$
   b) Pour z= $e^{i\alpha}$. Déduire la forme exponentielle de z'
   c) Déterminer et construire L'ensemble des points M'(z') Si M décrit le cercle $\zeta(O,1)$

2- a) Pour $\theta \in$ IR réel résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $\frac{z^2+1}{z} = 2\sin(\theta)$.
   b) Vérifier que $\sin\theta - i\cos\theta = -i(\cos\theta + i\sin\theta)$.
   c) Déduire alors la forme exponentielle de chacune des solutions