# Série n°20

## Exercice N°1

On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tel que : $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$

1/ Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R à déterminer

2/ Soit P le plan d'équation cartésienne : 2x – 2y + z – 2 = 0 ; Caractériser $S\cap P$

3/ Soit $P_m$ le plan dont une équation cartésienne est : $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$

a) $\Delta$ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-1 \quad ; \alpha\in\mathbb{R} \\ z=2\alpha \end{cases}$

Vérifier que $\Delta$ est incluse dans le plan $P_m$

b) Déterminer m, pour que $P_m$ soit tangente à la sphère S et préciser le point du contact

## Exercice N°2

L'espace $\xi$ étant rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A ( -1,-1,1 ) ; B ( -1, 2, -2 ) et le plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-2=0$

1/ Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P

2/ Soit $\alpha$ un réel et $S_\alpha$ l'ensemble des points de $M(x,y,z)$ de l'espace $\xi$ tels que :

$x^2+y^2+z^2+2x-2\alpha y+2\alpha z+\alpha^2+\alpha=0$

a) Montrer que pour tout réel $\alpha$ $S_\alpha$ est une sphère de centre $I_\alpha(-1,\alpha,-\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{\alpha^2-\alpha+1}$

b) Montrer que, quand $\alpha$ varie dans $\mathbb{R}$, $I_\alpha$ décrit la droite ( AB)

3/ Etudier, suivant les valeurs de $\alpha$, les positions relatives de $S_\alpha$ et du plan P

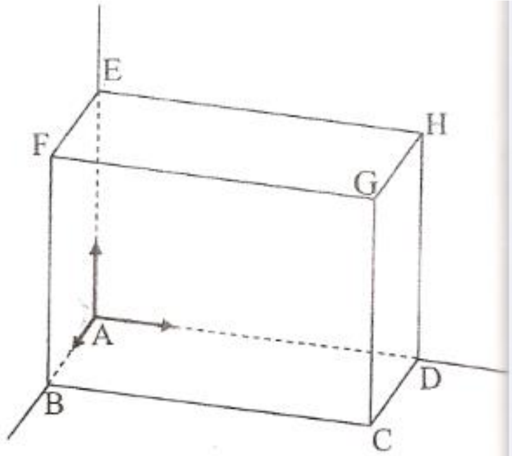
4/ Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $S_{1-\alpha}$

a) Montrer que I est le milieu du segment $[I_\alpha I_{1-\alpha}]$

b) En déduire que les sphères $S_\alpha$ et $S_{1-\alpha}$ sont symétriques par rapport au point I

## EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ ; $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.




1) a) Vérifier que $\overrightarrow{AG}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$.

b) Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ ; $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB}\wedge\overrightarrow{EG}$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit $\alpha$ un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha, 4\alpha, 3\alpha)$.

a) Vérifier que M décrit la droite (AG) privée du point G.

b) Montrer que M n'appartient pas au plan ( EBG ).

3) Soit $v$ le volume du tétraèdre MEBG.

a) Exprimer $v$ en fonction de $\alpha$.

b) Calculer le volume du tétraèdre AEBG.

c) Pour quelles valeurs de $\alpha$, $v$ est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

## Exercice N°4

Soit ABCDEFGH un cube d'arrête AB=1et I=A*D. On muni l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG).
   b) Calculer le volume v du tétraèdre BIGE, en déduire le volume v' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie h de centre A et de rapport $-\frac{3}{2}$.
2) Soit S la sphère de centre E et de rayon 1 et $S'=t_{\overrightarrow{AC}}(S)$.
   a) Montrer que S est tangente au plan (BIG) au point $O\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.
   b) Montrer que S' coupe (BIG) suivant un cercle (C') dont-on précisera le centre et le rayon.
   c) Montrer que (OB) est tangente à (C') en O.
3) Soit $\Delta$ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OE}$. Vérifier que G appartient à $\Delta$ et que $\Delta$ est une droite parallèle à (OB).

## Exercice N°5

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On désigne par S l'ensemble des points M(x,y,z) tels que : $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : 2x-2y+z-2=0. Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S\cap P$.

3) Déterminer les translations qui transforment P en un plan tangent à S.

## Exercice n°1

1) Montrer que $5^0\equiv1(13)$ , $5^1\equiv5(13)$ ,$5^2\equiv-1(13)$,$5^3\equiv-5(13)$.

2) En déduire que pour tout entier naturel k on a :

$5^{4k}\equiv1(13)$ , $5^{4k+1}\equiv5(13)$ , $5^{4k+2}\equiv-1(13)$ , $5^{4k+3}\equiv-5(13)$.

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $5^{2n}+5^n\equiv0\ (13)$ .

## Exercice n°2

1) Montrer que , pour tout entier naturel n on a : $4^n\equiv1(3)$ .

2) Prouver que $4^{28}$ -1 est divisible par 29 .

3) a) pour $n\in\{1,2,3,4\}$ *déterminer le reste de la division de* $4^n$ *par* 17.

b) En déduire que pour tout entier naturel k , $4^{4k}$ -1 est divisible par 17 .

4) Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n$ -1 est-il divisible par 5 ?

## Exercice n°3

Montrer que

1) $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $4^{3n}+6*2^{3n}\equiv0(7)$ .

2) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *on a* : $3^n+4^n\equiv7^n\ (12)$

3) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}$ *l'équation* : $x^2\equiv1\ (8)$

## Exercice 4

Soit l'équation (E ) : 11x – 24y = 1

1) Vérifier que (E ) admet au moins une solution
2) Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide une solution particulière de (E )
3) Résoudre dans Z² les équations (E ) :11x – 24y = 1 et (E') : 11x – 24y = 5