Série n°26

ExerciceN° 1 :

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de cocher cette réponse.

1. Si A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,7 et p(B) = 0,2 alors

☐ $p(A\cup B)=0,9$ ☐ $p(A\cup B)=0,76$ ☐ $p(A\cap B)=0,5$

2. Si A et B sont deux évènements indépendants tels que p(A) = 0,6 et $p(A\cup B)=0,8$ alors

☐ $p(A\cap B)=0,48$ ☐ p(B) = 0,2 ☐ $p_A(B)=0,5$

3. On lance un dé équilibré trois fois de suite. La probabilité d'obtenir au moins un 6 est :

☐ $\frac{3}{6}$ ☐ $\frac{1}{216}$ ☐ $\frac{91}{216}$

4. Si A et B sont deux évènements relatifs à une même épreuve tels que p(A) = 0,4 $p_A(B)=0,2$ et $p_{\overline{A}}(B)=0,4$ alors

☐ $p(B)=0,6$ ☐ $p(B)=0,32$ ☐ $p(A\cup B)=0,08$

5. Si A et B sont deux évènements relatifs à une même épreuve tels que $p(A\cap B)=0,12$ et $p(\overline{A}\cap B)=0,36$ alors

☐ $p_B(A)=0,24$ ☐ $p_B(A)=0,48$ ☐ $p_B(A)=0,25$

Exercice N°2

Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètre) d'une voiture, en fonction de sa vitesse v (en kilomètres par heure)

v (km/h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

- On note $\overline{v}$ et $\overline{d}$ les moyennes respectives de v et d.
- On note V(v) et V(d) les variances respectives de v et d.

1/ Calculer $\overline{v}, \overline{d}, V(v)$ et $V(d)$

2/a) Construire le nuage de points associé au couple (v, d) et placer le point moyen G

b) Peut-on conclure à l'existence d'une relation entre v et d

3/ Soit Δ la droite d'ajustement linéaire entre v et d

a) Donner une équation de la droite Δ de cœfficient directeur 1,3

b) Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h.

4/ La vitesse de la voiture est de 140 km/h, lorsque le conducteur, roulent suivant une ligne droite, aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres.

Pourrait-il alors éviter cet obstacle sachant qu'il met **une seconde** pour appuyer sur les freins ?

Exercice N°3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2

U1 contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs, U_2 contient 3 jetons noirs et 2 jetons blancs

1) une première épreuve consiste à tirer un jeton de U_1 et un jeton de U_2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.

A : « obtenir 2 jetons noire »

B : « obtenir 2 jetons de même couleur »

C : « obtenir un jeton blanc et un jeton noir »

2) une deuxième épreuve consiste à choisir une urne au hasard et de tirer un jeton de cette urne
3) Montrer que la probabilité d'avoir un jeton blanc est égal à $\frac{1}{2}$
4) Calculer la probabilité pour que le jeton provienne de U_1 sachant qu'il est blanc.
5) on répète la deuxième épreuve n fois de suite (n>1) en remettant chaque fois le jeton tiré dans son urne d'origine; on désigne par X l'aléa défini par le nombre de fois d'avoir un jeton blanc

a) donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance et sa variance.

c) Montrer que pour tout n>1 , la probabilité de tirer deux fois un jeton blanc est supérieur ou égal à $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice N°4

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

1) Déterminerλ, arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

2) A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3) Calculer la probabilité qu'un robot nait pas eu de panne au cours des deux premières années
4) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?
5) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendance.

Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice N°5

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C1 et C2.

Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C1 et 80% de câbles C2.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 1000 câbles.

1) Préciser la probabilité de l'événement E = "les 4 câbles sont du type C1"
2) Préciser la probabilité de l'événement F = "1 câble est du type C1 et 3 câbles sont du type C2"
3) Préciser la probabilité de l'événement G = "au moins un câble est du type C1"

Partie B

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience et on note X le nombre de câbles C1 obtenus.

1) On suppose que n = 4.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C1.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C1.
   c) Calculer l'espérance E(X).
2) Dans cette question n est inconnu.
   a) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n.
   b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C1 ?

Exercice N°6

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n} \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}(U_n+V_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier n de IN , $U_n > 0$ et $V_n > 0$.
2) Soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = V_n - U_n$.
   a) Démontrer que $W_{n+1} = \dfrac{W_n^2}{2(U_n+V_n)}$.
   b) Démontrer que pour tout entier n de IN , $W_n \geq 0$.
   c) Démontrer à l'aide de (a)que : $W_{n+1} \leq \frac{1}{2} W_n$.
   d) En déduire que pour tout entier n de IN on a : $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3) a) Etudier la monotonie des suites U et V.
   b) Prouver alors que les suites U et V sont adjacentes.
4) a) Montrer que la suite $T_n = U_n.V_n$ est une suite constante.
   b) Déduire alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{2}$.
   c) Calculer U_4 et V_4 . Déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux rationnels.