Série n°27

Exercice N° 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   Soient $C = \{ M(x,y)$ tels que $y = \sin x + \cos x \ ; \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \}$ et S est le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe $(O, \vec{i})$; alors le volume de S est $\frac{\pi}{2}(2+\pi)$ u.v

2) soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$ alors φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x}$.

3) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln 2$.

4) $\lim \frac{1}{n^2}\int_1^{2n} \frac{1}{x^n+1}\,dx = 0$.

5) Soit $m \in$ IR ; L'ensemble des points M(x,y) tels que : $mx^2 + 4y^2 = m^2+1$; est une ellipse d'axe focal $(o,\vec{i})$ lorsque $0 < m < 4$.

Exercice N° 2 :

Soi t l'équation differentielle (E) : $y' - y\ln 2 = \ln 2$.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = a2^x + b$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer les réels a et b pour que f soit une solution de (E) et C_f passe par O.

   On prend pour la suite de l'exercice $f(x) = 2^x - 1$.

2) On pose g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \ln(2^x) - \ln(x+1)$

   a) Dresser le tableau de variation de g sur [0 , 1].

   b) En déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

   c) En déduire alors la position de C_f et de la droite $\Delta : y = x$ sur [0 , 1].

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

   a) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

4) Expliciter f^{-1}.

5) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ et les droites D : x = 0 et D' : x = 1. Calculer A.

Exercice N° 3 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

2) Soit n un entier naturel non nul.

   a) Montrer que le couple $(14n + 3 , 21n + 4)$ est solution de (E).

   b) En déduire la valeur de $(14n + 3) \wedge (21n + 4)$

3) on pose $d = (2n + 1) \wedge (21n + 4)$

   a) Montrer que d = 1 ou d = 13.

   b) Montrer que $n \equiv 6 \ [13]$ si et seulement si d = 13.

4) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

   $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

   a)Montrer que A et B sont divisibles par $n - 1$.

   b) Déterminer en fonction de n, $A \wedge B$.

Exercice N° 4 :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace. On considère les points A(1,0,0) ; B(0,1,0) ; C(0,0,1) et D(1,1,1).

1)a) Calculer l'aire du triangle ABC

b) Montrer que ABCD est un du tétraèdre et calculer son volume.

c) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

2) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3) Soit S l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

b) Montrer que S∩P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soit l'application h de l'espace dans lui-même, qui à tout point M(x , y , z)associe le point

M'(x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = 4x - 1 \\ y' = 4y - 1 \\ z' = 4z - 1 \end{cases}$

a) Montrer que h est une homothétie et préciser son centre et son rapport.

b) Déterminer S' = h(S) puis déterminer S'∩P.

Exercice N° 5 :

Partie A

On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{e^x+1}$

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel x, $g'(x) = -\frac{1}{(e^x+1)^2}$.

3) En déduire que pour tout réel x, g(x) >0.

Partie B

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

On note C_f la courbe de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) a)Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

   b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

3) a) justifier la dérivabilité de la fonction f sur IR.

   b) Déterminer f ' la dérivée de la fonction f et vérifier que $f'(x) = e^x g(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4) tracer C_f.

Partie C

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN* par $U_n = \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln(1+e^{-x})\,dx$.

1) a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

En déduire une primitive F de f sur IR.

b) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aires, est U_1.

c) Calculer U_1.

2)a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN*.

b) En déduire que (U_n) est convergente .On notera ρ sa limite.

c) Montrer que pour tout n ϵ IN*, $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\ln(1+\frac{1}{e}) \leq U_n \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\ln 2$.

d) Déduire un encadrement de ρ.