Série n°32

Exercice N°1

Soit l'équation (E) : $2y'+3y=6x-5$

1/ Soit $f(x)=ax+b$

Déterminer a et b pour que f soit solution de (E)

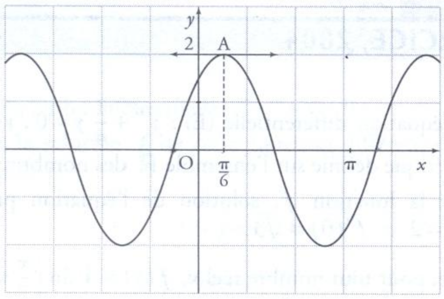
2/a) Montrer que $g(x)-f(x)$ est solution de (E') : $2y'+3y=0$ ssi g est solution de (E)

b) Résoudre alors (E)

Exercice N°2

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9y = 0$.
2) On désigne par f la solution particulière de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique est donnée ci-contre. Il est précisé que la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point A $\left(\frac{\pi}{6};2\right)$

   Déterminer une expression de f(x).
3) Montrer que, pour tout nombre réel x ; $f(x) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$
4) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)dx$. Interpréter graphiquement le résultat.



Exercice N°3

On donne les équations différentielles : $(E_0): y'-2y=0$ et $(E): y'-2y=2(e^{2x}-1)$

1/ Résoudre (E_0)

2/ Vérifier que $f(x)=2xe^{2x}+1$ est solution de (E)

3/a) Montrer que $(g-f)$ est solution de (E_0) si et seulement si g est solution de (E)

b) Résoudre alors (E)

4/a) Montrer que la solution de (E) qui s'annule en 0 est $h(x)=(2x-1)e^{2x}+1$

b) Vérifier que $1-h(x)\geq 0$ pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ en déduire l'aire limitée par la courbe de h

dans un repère orthonormé et les droites d'équations $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ et $y=1$

Exercice N°4

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = e^{-x}$

1) *Soit f une solution de E*

   a- *Calculer* $I = \int_0^1 e^{-x}dx$

   $b -$ *Montrer que* $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,(f(1) - f(0)) - \frac{1}{2}I$

   c– *Posons* $g(x) = 2f(x)$. *Calculer l'aire de la partie du plan limitée*

   par $\boldsymbol{Cg}$, $\boldsymbol{Cf}'$ *et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$

2) *Résoudre l'équation* $(E_0) : y' - 2y = 0$
3) *Déterminer le réel a pour que la fonction g définie par*
   $g(x) = ae^{-x}$ *soit une solution de* (E)
4) *Montrer que f est une solution de (E) SSI* $(f - g)$ *est une solution de* (E_0)
5) *Déterminer alors l'ensemble des solutions de* (E)

Exercice N°5

1) Résoudre sur IR l'équation différentielle (E') : y'+y= 0.

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

a/ Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = ax.e^{-x}$ (où a est un réel).

Déterminer le réel a pour que la fonction g soit une solution de l'équation (E).

b/ Montrer que h est solution de (E) si et seulement si (h-g) est solution de (E') : y'+y= 0.

c/ Résoudre alors l'équation différentielle (E) et donner la solution de (E) tel que y(0)= 1.

3) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = (1+x).e^{-x}$ et soit $V_n = \int_0^n f(x)dx$ où $n \in IN^*$.

a/ Vérifier que f est la solution de (E) tel que y(0)= 1.

b/ Sans intégration par parties, montrer que pour tout $n \in IN^*$, $V_n = 2 - (2+n).e^{-n}$.

c/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

Exercice N°6

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = e^{-3x}.\ln(x)$

On pose $z = y\,e^{3x}$

1/ Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z' = \ln(x)$

2/ Résoudre alors l'équation (E)