Série n°35

Exercice 1

Dans le plan P orienté on considère un carré ABCD tel que l'angle ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$) a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$.
On désigne par I et K les milieux respectifs des segments [AC] et [CD]. Représenter ces points sur une figure (on choisira AB = 4 cm).

On se propose d'étudier la similitude directe S telle que S (A) = I et S (C) = K

1° Recherche géométrique des éléments de S.

a) Donner le rapport et l'angle de S.

b) Démontrer que le centre Ω de S est le point d'intersection autre que I des cercles de diamètre [AD] et [IC]. Placer ces cercles et Ω sur la figure.

2° Recherche du centre de s à l'aide des nombres complexes.

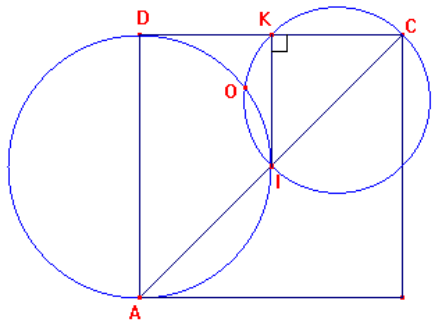
Le plan est rapporté au repère direct (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$).

a) Donner les affixes des points A, C, I et K.

b) Donner l'écriture complexe de S.

c) En déduire les coordonnées de Ω.

Correction :



Recherche géométrique :

1. S(A) = I et S(C) = K ; le rapport de la similitude est donné par le rapport IK sur AC ; IK = $\frac{1}{2}a$ et AC = $a\sqrt{2}$. On a donc $\frac{IK}{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
   L'angle de la similitude est donné par l'angle formé par ($\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{IK}$) = $\frac{\pi}{4}$
   S est donc une similitude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2. ($\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega I}$) = $\frac{\pi}{4}$ et ($\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DI}$) = $\frac{\pi}{4}$
   donc ($\overrightarrow{\Omega A}$, $\overrightarrow{\Omega I}$) = ($\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DI}$) ; on peut en déduire la cocyclicité des points Ω, D, A et I. Ω∈ cercle circonscrit à DAI = cercle de diamètre [AD].

De même ($\overrightarrow{\Omega C}$, $\overrightarrow{\Omega K}$) = ($\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IK}$) = $\frac{\pi}{4}$ ⇒Ω, I, C et K cocycliques donc Ω∈ cercle de diamètre [IC]

Ces deux cercles ont deux points d'intersections Ω et I le point invariant n'est pas I (car S (A) = I) donc le point invariant est Ω.

Recherche complexe :

1. A a pour affixe 0 ; C a pour affixe 1 + i ; I a pour affixe $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ et K a pour affixe $\frac{1}{2} + i$.
2. $z' = a.z + b$ et S(A) = I et S(C) = K $\Rightarrow \frac{1}{2} + i\frac{1}{2} = b$ et $\frac{1}{2} + i = a.(1+i) + b \Rightarrow a = \frac{1+i}{4}$
   donc $z' = \frac{1+i}{4}.Z + \frac{1+i}{2}$

3. $z_0 = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$; $\Omega\,(\frac{2}{5} ; \frac{4}{5})$

Exercice 2

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, j).

Soit f l'application de P dans P qui à M (x, y) associe M' (x', y') définie par :

$$\begin{cases} x' = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y' = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$$

1° Soit z l'affixe de M, z' l'affixe de M'. Trouver une relation simple entre z et z'.

Montrer qu'il existe un réel k tel que, quel que soit A et B dans P d'images A' et B' on ait :

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = k\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ déterminer k. Montrer que f n'est pas une similitude directe.

2° Montrer que f a un point invariant Ω et un seul que l'on déterminera.

3° Montrer qu'il existe une homothétie h de centre Ω et une droite D passant par Ω telles que :

$f = h \circ S_D = S_D \circ h$ où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.

Correction :

1. $z' = x' + iy' = \sqrt{3}\,x + y - 3 + i\times(x - \sqrt{3}\,y + 3) = (\sqrt{3} + i)\times(x - iy) - 3 + 3i$.

Donc $z' = (\sqrt{3} + i)\,\bar{z} - 3 + 3i$.

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = |b' - a'| = |\sqrt{3} + i|\,|b - a| = 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \Rightarrow k = 2$

- S n'est de la forme $z' = a.z + b$ donc ce n'est pas une similitude.
- Soit σ une symétrie orthogonale d'axe (O ; $\overrightarrow{i}$), c. a. d. : $z \mapsto \bar{z}$ et

  $g = f \circ \sigma$ tel que $g : z \mapsto (\sqrt{3} + i)\,z - 3 + 3i$.

g conserve les angles orientés (c'est une similitude) ; or σ ne conserve pas les angles orientés (c'est une symétrie orthogonale) ; donc f ne conserve pas les angles $\Rightarrow$ donc fn'est pas une similitude.

2. Soit z_0 le point invariant celui-ci vérifie : $\begin{cases} x = \sqrt{3}x + y - 3 \\ y = x - \sqrt{3}y + 3 \end{cases}$ .... $\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \Omega\,(\sqrt{3} ; \sqrt{3})$

3. $h_{(\Omega ; 2)}$ d'après le 1° et le 2°, $h^{-1} \circ f$ est une isométrie laissant Ω invariant et changeant les angles de vecteurs en leurs opposés. $h^{-1} \circ f$ est donc une symétrie orthogonale $= S_D \Leftrightarrow f = S_D \circ h = h \circ S_D$. (homothétie et symétrie orthogonale dont l'axe contient le centre de l'homothétie permuttent)