Série n°37

Exercice N°1

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - 2\,y = \dfrac{-2}{1+e^{-2x}}$

1°) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f la fonction définie par $f(x) = e^{2x}\,g(x)$

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

2°) Résoudre alors (E)

Exercice N°2

1/ Les face d'un dé cubique parfaitement équilibré sont numéroté -1, -1, 1, 1, 2, 3

On lance le dé une fois puis on lit le nombre inscrit sur la face supérieur.

Soit les évènements A : « avoir un nombre impaire » ; B : « avoir un nombre positif »

a) Calculer $P(A); P(B)$ et $P(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ? Justifier.

b) On sait que le nombre obtenue est impaire .Qu'elle est la probabilité qu'il soit négatif ?

2/ Une personne se rend au lieu de son travail soit en vélo soit en moto.

En vélo la durée X en minute, du trajet suit une loi uniforme sur [15 , 40].

En moto la durée Y du même trajet suit une loi uniforme sur [10 , 20].

a) Calculer : $P(X > 30)$ et $P(Y < 15)$

b) Cette personne est partie en moto à 7h50 mn du matin, quelle est la probabilité qu'il arrive au lieu de travail avant 8h du matin.

3/ Un matin, cette personne décide de jouer au jeu suivant :

Il lance le dé cité ci-dessus une fois .qu'il obtient un nombre positif alors il se rend au travail en vélo. Sinon, il se rend au travail en moto

a) Calculer la probabilité que la duré du trajet soit inférieur à 18 mn.

b) On sait que ce jour, cette personne a mis un temps inférieur à 18 mn pour arriver au travail. Calculer la probabilité qu'il soit déplacé en vélo.

Exercice N°3

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points A(0,1,1), B(1,3,3) et C(-3,-2,1).

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire une mesure en radian de $\widehat{BAC}$.
   b) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis donner une équation cartésienne du plan P=(ABC).
   c) Déterminer le volume v du tétraèdre OABC.
2) Soit **t** l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M' tel que :
   $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{OM}$.
   a) Montrer que **t** une translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{AB}$.
   b) Donner les expressions analytiques de **t**. en déduire les coordonnés du point A'=t(A)

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x,y,z) de ξ tel que : $x^2+y^2+z^2-2y-2z-7=0$
   a) Montrer que (S) est une sphère dont-on préciser le centre et le rayon.
   b) Montrer que S'= **t**(S) coupe P suivant un cercle dont-on précisera le centre H et le rayon r.

Exercice N°4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne la conique (C_m) d'équation : $2mx^2 + (m+1)y^2 - 8(m-1)x - 2m - 1 = 0$ où m est un paramètre réel différent de -1.

1) Pour quelle valeur de m la conique (C_m) est-elle une parabole ?

Déterminer alors son sommet, son foyer et sa directrice.

2) Dans cette question on prend m = 2 .

a- Déterminer la nature, le centre et les sommets de l'axe focal de (C_2)

b- La conique (C_2) coupe l'axe des ordonnées aux points G et L ;

écrire des équations des tangentes à (C_2) en ces points.

3) Soit f la fonction donnée par $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2} - x^2}$ et (T) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Démontrer que (T) est une partie d'une courbe (C_m) ; déterminer dans ce cas la nature et les éléments de (C_m) .

b- On désigne par (D) le domaine limité par (T) et l'axe des abscisses.

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

Exercice N°5

On pose $a = 7^{2009} + 7^{2010} + 7^{2011}$.

1/ Soit n un entier naturel. Discuter suivant les valeurs de n, le reste de 7^n modulo 100.

2/ En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que $a = 100k - 1$.

3/a) En utilisant la formule du binôme, montrer que $a^{100} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 100^2)$.

a) Déterminer les quatre dernier chiffres de a^{100}