Série n°06

EXERCICE N°1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère l'equation : (E): $z^3 - 3(2+i)z^2 + 3(3+4i)z - 9(2+3i) = 0$.

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 6z + 9 - 6i = 0$.

2) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire que l'on précisera.

   b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

3) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $z_1 = 3i$, $z_2 = 3 + \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et

   $z_3 = 3 - \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

   a) Vérifier que : $(z_1 - z_2) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_3 - z_2)$. Déduire une mesure de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

   b) Prouver alors que le triangle ABC est équilatéral.

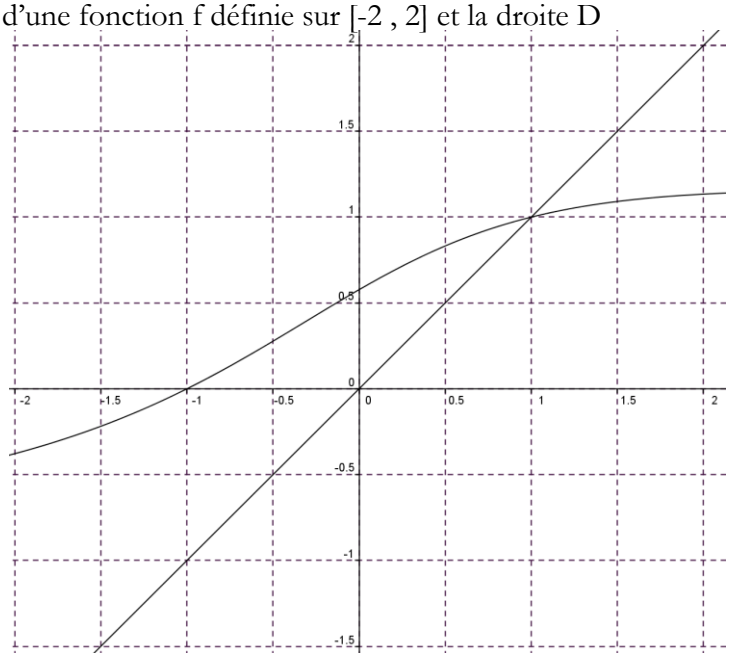
   c) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z_3 - z_2$.

   En déduire un argument du nombre complexe $3+\sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 3)$.

4) Déterminer l'affixe z_4 du point D pour que ABCD soit un losange.

EXERCICE N°2

Dans la graphe ci-dessous on a représenté la courbe C d'une fonction f définie sur [-2 , 2] et la droite D d'équation : y= x



On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour $n \geq 0$

1/ En utilisant le graphique :

a) Quel est le sens de variation de f ?

b) Déterminer le signe de [f(x)-x] sur [-2,2]

2/a) Montrer par récurrence que :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$

c) Vérifier que la suite U est croissante

d) En déduire que U est convergente et calculer sa limite.

3/ On considère la suite

$(t_n)_{n>0}$ définie par $t_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} U_k$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} t_n = 0$

4/ La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+3}}$

On désigne par V la suite définie par $V_n = \sum_{k=0}^{n}(2U_{k+1} - U_k)$; $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq \frac{1+U_n}{2}$. En déduire que $V_n \geq n+1$

b) Déterminer, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$

EXERCICE N°3

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...

On considère la suite U définie par : $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

1/a) Montrer que la suite U est décroissante, puis déduire qu'elle est convergente

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$; En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

c) On donne : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$

Montrer que $S_n = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} U_k + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$

d) Déduire que : $S_n = -U_n + 4(1-\frac{1}{2^n})$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

2/Soit $V_n = n(\sin x)^{n-1}$ avec $0 < x < \frac{\pi}{6}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 < V_n \leq U_n$; déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = (\sin x)V_n + (\sin x)^n$

c) Soit $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(\sin x)^{k-1}$

Montrer que : $(1-\sin x).S'_n = -(\sin x)V_n + \frac{1-(\sin x)^n}{1-\sin x}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$

EXERCICE N°4

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse proposée est exacte.
L'exercice consiste à cocher la réponse exacte sans justification.

1/ Si f est continue et strictement décroissante sur $[1,8]$ et si $f([1;8]) = [-1,8]$ alors :

☐ f(1)= -1 et f(8)=8 ☐ -1< f(1) <8 ☐ f(1)=8 et f(8)= -1

2/ Si f est continue sur $[-2,2]$ et si $f([-2,2]) = [-5,-3]$ alors l'équation f(x)=0

☐ n'admet pas de solution dans $[-2,2]$ ☐ admet au moins une solution ☐ admet une unique solution

3/ Si f est strictement croissante non majorée sur $]3,+\infty[$ alors :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

4/ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $g(x) = \cos(\frac{1}{x}) - f(x)$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est égale à

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ $-\infty$

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...