Série n°07

EXERCICE N°1

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_n = \dfrac{2}{u_n}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

1°) Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$ (1)

3°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \geq v_n$.

4°) Montrer que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.

5°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n - v_n \leq 1$ et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leq u_n - v_n$ (2)

6°)a -Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}(u_n - v_n)$ (on pourra utiliser les relations (1) et (2)) b -En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n - v_n \leq \dfrac{1}{4^n}$

7°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donner leur limite commune l .

EXERCICE N°2

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

1) On considère dans X l'équation : (E) $z^2 - (2\cos\theta + i)z + 1 + i e^{i\theta} = 0$.

a. Vérifier que $z' = e^{i\theta}$ est une solution de (E).

b. Déterminer alors l'autre solution z" de (E) .

c. Déterminer et construire l'ensemble des points N d'affixe z" lorsque θ varie.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_A = \dfrac{i}{2}$, $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = i + e^{-i\theta}$

a. Exprimer $z_2 - \dfrac{i}{2}$ à l'aide de $z_1 - \dfrac{i}{2}$.

b. En déduire que M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à la droite $D_{(A, \vec{u})}$.

3) Déterminer les valeurs de $\sin\theta$ pour les quelles le triangle AM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin(\frac{\pi}{x})}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) a. Montrer que pour tout x > 0 , $|f(x)| \leq x^3$.

b. Montrer alors que f est continue en 0.

2) a. Montrer que f est continue sur □ .

b. Montrer l'équation : $\sin(\dfrac{\pi}{x}) = \dfrac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution α dans [1 , 2].

3) a. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pi$.

b. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...