Les isométries du plan
Les déplacements et les antidéplacements

EXERCICE 1:

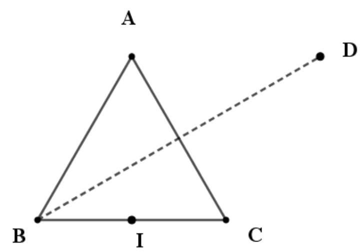
Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé direct (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Soit f l'application de P dans P, qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y')
tel que : $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie de P.
2) a) Montrer que f admet un seul point invariant que l'on déterminera.
   b) En déduire que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2:

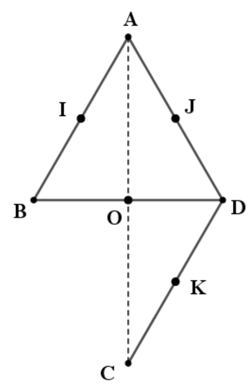
1) Si f désigne une symétrie glissante du plan, alors l'isométrie f o f est :
   a) une symétrie glissante b) l'identité du plan c) une translation
2) La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie :
   a) orthogonale b) centrale c) glissante
3) Soit ABCD un carré direct et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors r est égale à :
   a) $S_{(AB)} o S_{(AC)}$ b) $S_{(AB)} o S_{(AD)}$ c) $S_{(AC)} o S_{(AB)}$
4) Soit A, B et C trois non alignés et f une isométrie qui fixe A et B et ne fixe pas C alors f est :
   a) l'identité b) $S_{(AB)}$ c) $t_{\overrightarrow{AB}}$
5) Soit O le milieu de [AB] et f une isométrie qui envoie A en B et B en A. Alors f(O) est :
   a) A b) O c) B
6) Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie qui envoie A en B, B en C et C en A Alors $fofof$ est :
   a) $S_{(AC)}$ b) $t_{\overrightarrow{AB}}$ c) l'identité

EXERCICE 3:



Soit ABC un triangle équilatéral direct, D est le symétrique de B par rapport à (AC) et I le milieu du segment [BC].
Soit f une isométrie du plan qui fixe A et qui envoi B en C et C en D. On pose $g = S_{(AC)} o f$
1) Déterminer g(A), g(B), g(C) et g(I).
2) Montrer que g est une symétrie orthogonale que l'on caractérisera.
3) Identifier alors f.

EXERCICE 4:

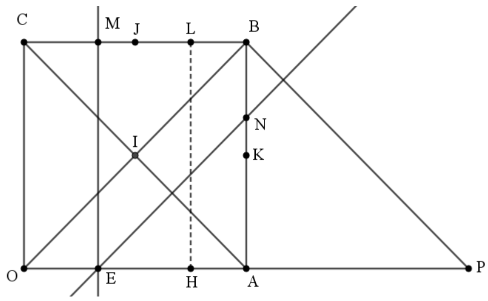


Soit ABD un triangle équilatéral et I, O et J sont les milieux respectifs des segments [AB], [BD] et [AD]. Soit C le symétrique de A par rapport à (BD) et K le milieu de [DC]. Soit f l'isométrie du plan vérifiant :
- f n'admet pas de points fixes
- f(A) = B et f(I) = O

1) Vérifier que f est une symétrie glissante.
2) Montrer que O est le milieux du segment [B , f(B)] puis déduire f(B).
3) a) Identifier l'isométrie du plan qui envoi A en B , B en D et D en A.
   b) Déterminer l'image du triangle ABD par f. En déduire f(D).
4) Soit $g = t_{\overrightarrow{DJ}} \circ f$
   a) Vérifier que $g(B) = J$
   b) Déterminer $g(I)$ et $g(O)$. En déduire la nature de g
   c) Montrer alors que $f = S_{(IO)} \circ t_{\overrightarrow{JD}}$

EXERCICE 5:

Le plan étant orienté dans le sens direct. On considère un carré OABC de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit J le milieu de [BC], K le milieu de [AB], L le milieu de [BJ] et H le projeté orthogonal de L sur [OA].
Soit E le point de [OA] distinct de O et de A. La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB] en N.
1) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C sur B et M sur N.
2) a) Montrer que f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que f(B)=A.
   c) En déduire que I est le centre de la rotation f.
3) a) Montrer que $f \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale dont on déterminera l'axe.
   b) En déduire que $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
4) Soit g l'antidéplacement qui envoie C sur B et M sur N.
   a) Montrer que g(B)=A. (On pourra se servir de l'isométrie $g \circ S_{(MC)}$)
   b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on déterminera le vecteur et l'axe.
   c) Soit P le point tel que ACBP soit un parallélogramme. Montrer que g(A)=P
   d) Déterminer g((CA))



5) a) Déterminer $f \circ g(C)$ et $f \circ g(B)$.
   b) Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.