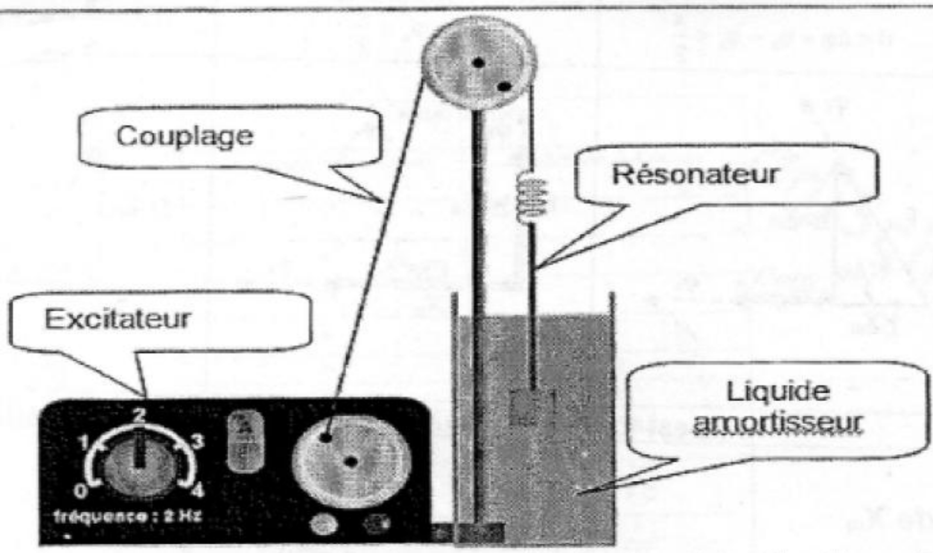
Rappel : Oscillation libre non Amorti

- L'élongation X est **sinusoïdale** périodique. subie des **oscillations** sans **diminution** d'amplitude.
- **Les caractéristiques d'oscillation.** $\begin{cases} N0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}. \\ T0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}. \\ Wo = \sqrt{\frac{K}{m}}. \end{cases}$

Les oscillations forcées

A- Etude expérimentale

I Production des oscillations mécaniques forcées



À l'aide d'un moteur (excitateur), on excite le pendule élastique (résonateur) en y appliquant une force excitatrice sinusoïdale $F(t)=F_m\sin(\omega t+\varphi_F)$

En faisant varier la fréquence de l'excitateur et on mesure la fréquence d'oscillations du solide (en mesurant la durée de 10 oscillations). On trouve que la fréquence du résonateur est égale à celle de l'excitateur, on dit que les oscillations du solide sont imposées par l'excitateur. L'oscillateur n'est pas libre et les oscillations du solide sont dites forcées

- Lorsque Le pendule élastique est **soumis** à des **excitations périodique** de la forme $F(t) = F_m \sin(w\,t + \mathcal{E}_F)$. **imposées** par le dispositif d'entretien **(Moteur)** ou N est la fréquence de rotation, le pendule commence a' **osciller** avec la fréquence N.

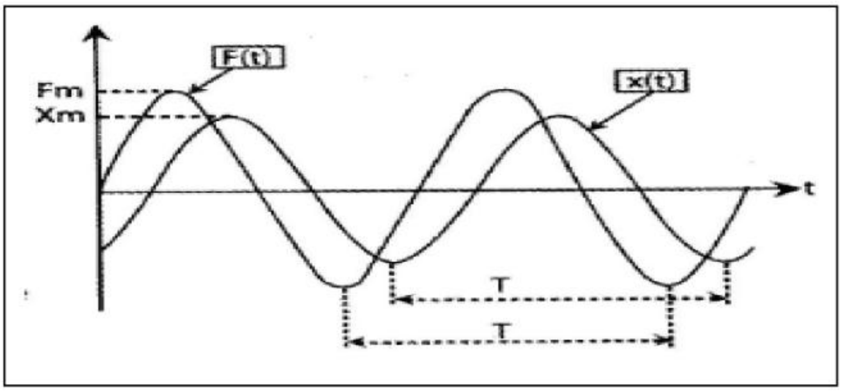
⇨ **Les Oscillations sont dite forcées.**

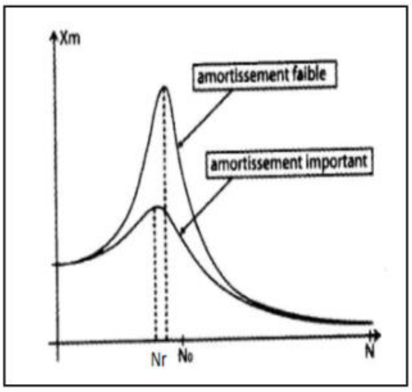
⇨ **Le pendule se comporte comme un oscillateur qui réalise des oscillations forcées.**

⇨ **Le dispositif d'entretient moteur est appelé excitateur, le pendule est appelé résonateur.**

- L'expérience montre que l'élongation X(t) est une **fonction sinusoïdale périodique** du temps $x(t) = x_m \sin(w t + \mathcal{E}_x)$.

- On donne les deux courbes X= f(t) et F= f(t). F(t) et toujours en **avance de phase** par apport a' X(t).





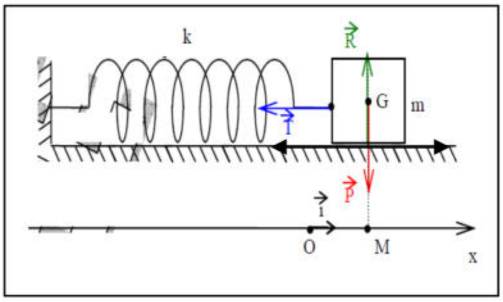
❖ **Influence de l'excitateur N sur l'amplitude**

- On fait **varie** La fréquence de **l'excitateur**, l'amplitude X_m atteint sa valeur **maximale** on dit alors que l'oscillateur est en **résonance d'élongation.**

- X_m **augmente**, atteint un **maximum** puis **diminue.**

- A' la **résonance** d'élongation ou d'amplitude c.-à-d. X_m est maximale on a $N_r^2 = N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$. ($N_r < N_0$.) et $w_r^2 = w_o^2 - \frac{h^2}{2\,m^2}$: ($w_r < w_0$).

B- Etude théorique



1- Equation différentielle

❖ En applique la **RFD** : $\Sigma \vec{F}_{app} = m\vec{a}$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{R} = m\vec{a}$$

❖ Par projection sur **(x x')**

$$-Kx - hv + F = ma \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + Kx = F$$

❖ L'équation différentielle admet comme solution

$$x = x_m \sin(wt + \mathcal{E}_x) \quad \text{et} \quad F(t) = F_m \sin(wt + \mathcal{E}_F)$$

2- Les vecteurs de Fresnel

- A la fonction $K X(t) = K x_m \sin(w t + \mathcal{E}_x)$. On associer un vecteur $\overrightarrow{V1}$ $(K x_m\ ,\ \mathcal{E}_x)$.
- A la fonction $h\frac{dx}{dt} = h w x_m \sin(w t + \mathcal{E}_x + \frac{\pi}{2})$. On associer un vecteur $\overrightarrow{V2}$ $(h w x_m\ ,\ \mathcal{E}_x + \frac{\pi}{2})$.
- A la fonction $m\frac{d^2x}{dt^2} = m w^2 x_m \sin(w t + \mathcal{E}_x + \pi)$. On associer un vecteur $\overrightarrow{V3}$ $(m w^2 x_m\ ,\ \mathcal{E}_x + \pi)$.

- A la fonction $F(t) = F_m \sin(w t + \mathcal{E}_F)$. On associer un vecteur $\vec{V}$ $(F_m , \mathcal{E}_F)$.
  - **Soit $\vec{V} = \vec{V1} + \vec{V2} + \vec{V3}$.**

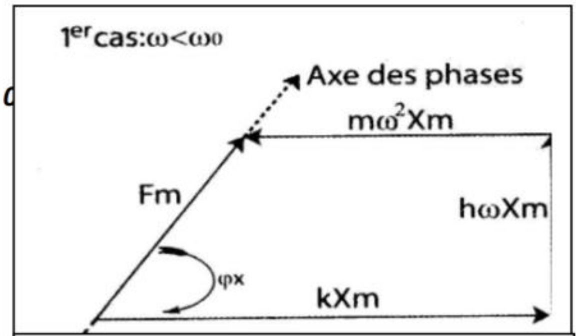
3- Détermination de X_m et $\mathcal{E}_x$ par la méthode de Fresnel

1er cas : $w^2 < \frac{K}{m} = w_0^2 \Longrightarrow N < N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\Longrightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) > 0$

$\Longrightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) = \frac{h w}{K - m w^2}$

F est en avance de phase par rapport a X.

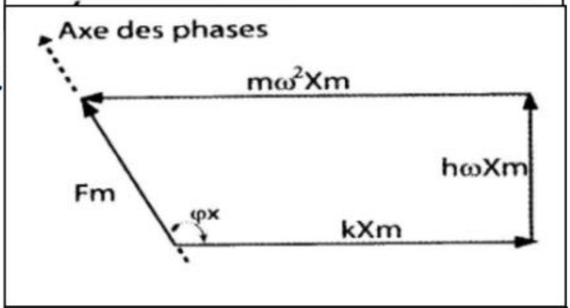


2ème cas : $w^2 > \frac{K}{m} \Rightarrow w > w_o \Rightarrow N > N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) \in] \frac{\pi}{2} ; \pi [\Longrightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) < 0.$

$\Longrightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x) = \frac{h w}{K - m w^2}$

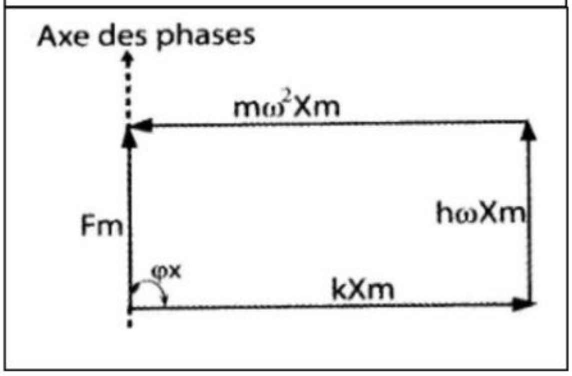
F est en avance de phase par rapport à X.



3ème cas : $m w^2 = K \Rightarrow w = w_0 \Rightarrow N = N_0$

$\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_x = \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{E}_F > \mathcal{E}_x$: $X_m = \frac{Fm}{h w}$.

F est en quadrature avance par rapport à x.



- **D'après Pythagore**

$(h X_m w)^2 + [K X_m - m w^2 X_m]^2 = Fm^2$

$$\Longrightarrow X_m = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 w^2 + (k - m w^2)^2}}$$

Remarque $V_m = X_m w = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{w} - m w)^2}}$ et $\mathcal{E}_v = \mathcal{E}_x + \frac{\pi}{2}$.

4- Détermination de N_r à la résonance d'élongation

- À la résonance d'élongation X_m est maximal.
- Pour que X_m soit maximal il faut que $f(w)$ soit minimal
- avec : $f(w) = h^2 w^2 + (k - m w^2)^2$

w	O	w_r	$+\infty$
$f'(w)$	-		+
$f(w)$	↘		↗
X_m	↗		↘

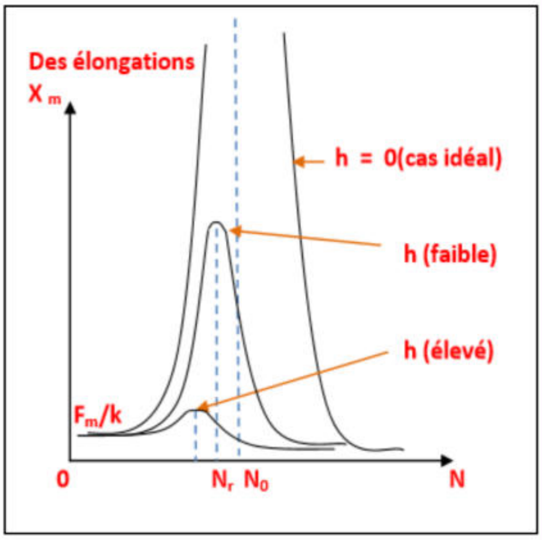
L'étude de f(w)

$f'(w) = 2 w [h^2 - 2m (K - m w^2)]$

$f'(w) = 0 \Longrightarrow w_r = 0$ ou $W_r^2 = W_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \Longrightarrow N_r^2 = N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$

- A' la **résonance** d'élongation ou d'amplitude c.-à-d. X_m est maximale on a $N_r^2 = N_o^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$. $(N_r < N_0.)$ et $w_r^2 = w_o^2 - \frac{h^2}{2m^2}$: $(w_r < w_0)$.

5- L'amplitude X_m et le déphasage si h = 0 Cas du rupture du ressort.

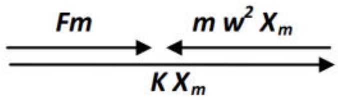


- *L'équation différentielle devient :* $m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = F$
- *La construction de Fresnel*

1er cas : $m w^2 < K \Rightarrow w < w_0 \Rightarrow N < N_0$

$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_x \Rightarrow$ ***F et x sont en phase***

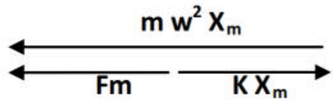
$X_m = \frac{Fm}{(K - mw^2)}$



2ème cas : $m w > K \Rightarrow w > w_0 \Rightarrow N > N_0$

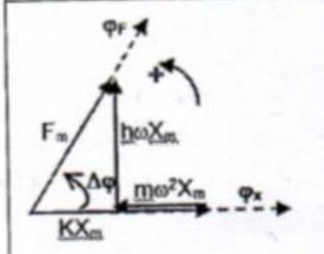
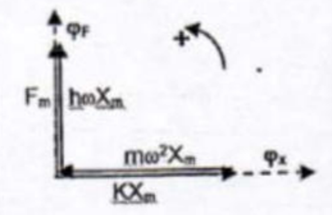
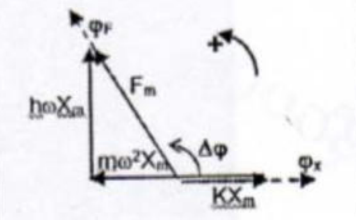
$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_x + \pi \Rightarrow$ ***F et x sont en opposition de phase***

$X_m = \frac{Fm}{(mw^2 - K)}$



à la resonance : $X_m \longrightarrow +\infty \Longrightarrow K - mw^2 \longrightarrow 0 \Longrightarrow w \longrightarrow w_o \Longrightarrow N \longrightarrow N_0 \Longrightarrow$ ***Rupture du ressort***

6- Conclusion

Trois cas sont possibles :		
$m\omega^2X_m < KX_m \rightleftarrows \omega < \omega_0$ $0 < \Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x < \frac{\pi}{2}$	$m\omega^2X_m = KX_m \rightleftarrows \omega = \omega_0$ $\varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2}$	$m\omega^2X_m > KX_m \rightleftarrows \omega > \omega_0$ $\frac{\pi}{2} < \varphi_F - \varphi_x < \pi$
		
F(t) est toujours en avance de phase par rapport à x(t)		

- ***L'amplitude X_m***

$$\boxed{X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (K - m\omega^2)^2}}}$$

- ***Le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$***

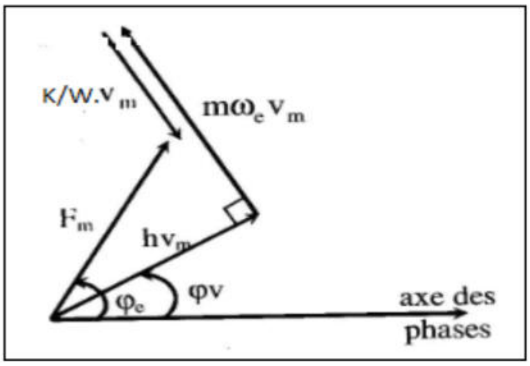
$$\boxed{tg\Delta\varphi = tg(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega}{K - m\omega^2}}$$

7- Résonance de vitesse

a- L'équation différentielle : $m\frac{dv}{dt} + hv + K\int v\,dt = F(t).$

$V = V_m \sin(wt + \mathcal{E}_v)$ et $F = F_m \sin(wt + \mathcal{E}_F).$

b- La construction de Fresnel

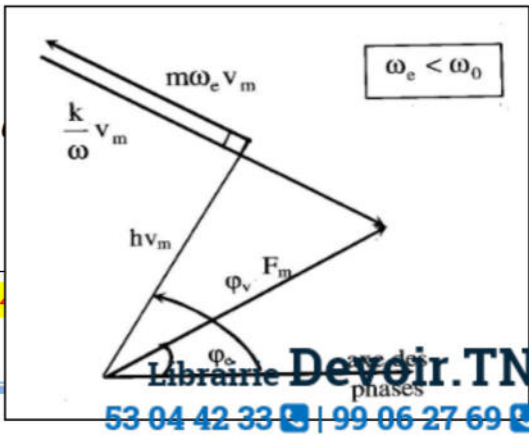


1^er cas : $\frac{k}{w} < mw \Rightarrow w_0 < w \Rightarrow N > N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) \in [0 ; \frac{\pi}{2}[\Rightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) > 0$

$tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) = \frac{mw - \frac{k}{w}}{h}$

F est en avance de phase par rapport à v.



2^ème cas : $\frac{K}{w} > mw \Rightarrow w_0 > w \Rightarrow N < N_0$

$(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) \in [-\frac{\pi}{2} ; 0[\Rightarrow tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) <$

$tg(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) = \frac{mw - \frac{k}{w}}{h}$

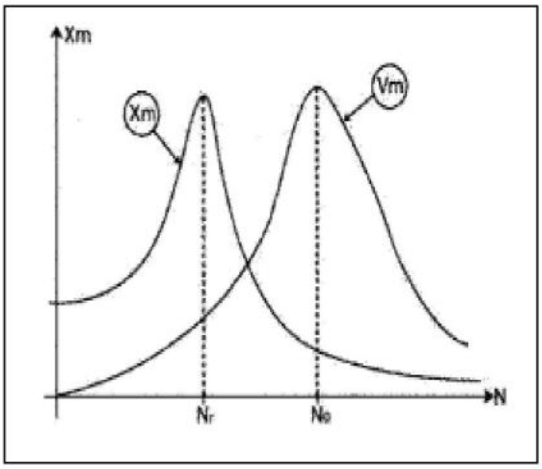
F est retard de phase par rapport à v.

3ème cas : $w = w_o \Rightarrow N = N_o$

$\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_v \Rightarrow$ *F et v sont en phase.*

$V_m = \frac{Fm}{h}$. V_m *et maximale.*

⇨ **C'est la résonance de vitesse.**



- ***Pour les trois cas, et d'après Pythagore***

$$V_m = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{w} - mw)^2}};$$

V_m ***est une fonction de N***

- *On donne la **courbe** qui donne* $V_m = f(w)$.
- *la **résonance** de vitesse a' lieu lorsque la fréquence **l'excitateur** est **égale** a' la fréquence **propre** du résonateur.*
- *l'amplitude V_m est maximale* $V_m = \frac{Fm}{h}$ **et** $\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_v$ ***Pour N = N₀.***

Remarque : $X_m = \frac{Vm}{w} = \frac{Fm}{\sqrt{h^2 w^2 + (\frac{k}{m} - m w)^2}}$. $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_v - \frac{\pi}{2}$.

8- Puissance moyenne absorbé par le résonateur

- $P = \frac{Fm.Vm}{2} \cos(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v)$ **avec** $\cos(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}_v) = \frac{h.Vm}{Fm} = \frac{h}{Z}$

avec $Z = \sqrt{h^2 + (\frac{k}{w} - mw)^2}$ **et** $F_m = h V_m$

⇨ $\boxed{P = \frac{1}{2} h V_m^2}$

- **A' la résonance de vitesse, V_m est maximale c-a-d $N = N_o$.**

$V_m = \frac{Fm}{h}$ ⇨ $P_{max} = \frac{1}{2h} F_m^2$.

9- Remarques très important.

❖ A' la résonance de vitesse $N = N_o$ on a $\begin{cases} Vm = \frac{Fm}{h} \\ v = F \end{cases}$.

- *Le vecteur de **Fresnel** associe au force de **frottement** est $\vec{f}$ ($f_m = h V_m$: $\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_v + \pi$) car $\vec{f} = -h \vec{V}$*
- Le vecteur de **Fresnel** associe au force **moteur** est $\vec{F}$ ($F_m = hV_m$: $\mathcal{E}_F = \mathcal{E}_v$).

⇨ $\begin{cases} fm = Fm \\ f = F + \pi \end{cases}$. ⇨ $\vec{F} = -\vec{f}$ ⇨ $\vec{F}$ ***et $\vec{f}$ sont directement oppose.***

⇨ ***F(t) et f(t) sont en opposition de phase et ayant la même amplitude.***

⇨ ***L'équation différentielle devient :*** $m \frac{d^2x}{dt^2} + K x = 0$

⇨ **Le pendule se comporte comme un oscillateur libre non amortie.**

- **Valeur limite du coefficient de l'amortissement h.**
  - A' la résonance d'élongation on a $w_r^{\ 2} = w_o^{\ 2} - \frac{h^2}{2\,m^2}$.
  - Pour qu'il y a résonance d'élongation il faut que

$$w_o^{\ 2} - \frac{h^2}{2\,m^2} \geq 0 \Longrightarrow h \leq \sqrt{2\,m\,k} \Longrightarrow h_{limite} = \sqrt{2\,m\,k}.$$

- ***Résonance d'élongation et de vitesse.***

Résonance d'élongation

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2}}$$

Condition de résonance :

$$\omega_r^{\ 2} = \omega_0^{\ 2} - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$N_r^{\ 2} = N_0^{\ 2} - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$$

Résonance de vitesse

$$V_m = \omega X_m \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{\omega} - m\omega)^2}}$$

$$\omega_r^{\ 2} = \omega_0^{\ 2}$$

$$N_r^{\ 2} = N_0^{\ 2}$$

La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence $N_r < N_0$ à laquelle il y a une résonance de vitesse.