

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2008		NOUVEAU REGIME	
		SESSION DE CONTROLE	
SECTION :	MATHEMATIQUES		
EPREUVE :	MATHEMATIQUES	DUREE : 4 h	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$.

Alors I est égale à

- a) 3 . b) $\frac{1}{4}$. c) $-\frac{1}{4}$.

2) Soit $\ell = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\ln(1-x) + \frac{1}{1-x} \right]$, alors

- a) $\ell = 1$. b) $\ell = 0$. c) $\ell = +\infty$.

3) Soit n un entier non nul tel que $(5n) \wedge (3^2 \times 5^3 \times 7) = 35$.

Alors

- a) $n \equiv 0 \pmod{3}$. b) $n \equiv 0 \pmod{5}$. c) $n \equiv 0 \pmod{7}$.

Exercice 2 : (4 points)

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, on considère l'équation

$$(E) : z^3 + (5+i)z^2 + (10+2i)z + 8 = 0.$$

- 1) a) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
b) Résoudre l'équation (E).

- 2) Dans le plan \mathcal{P} muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)z$.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Soit M un point du plan distinct de O et soit M' son image par f.

Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle et en déduire un procédé de construction du point M'.

- 3) On considère les points A_n définis par :

A_0 le point d'affixe $(-1+i)$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

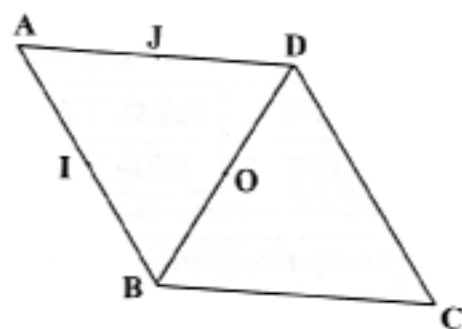
a) Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 .

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?



Exercice 3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure ci-contre, ABCD est un losange de centre O, I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [AD]



et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et B en D.
b) caractériser f .
- c) Déterminer l'image du triangle ABD par f .
- 2) Soit s un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $s(A) = C$.
a) Déterminer l'image du segment [BD] par s .
b) En déduire que s est la symétrie orthogonale d'axe (BD).
- 3) Soit g un antidéplacement qui transforme l'ensemble $\{A, B, D\}$ en l'ensemble $\{B, C, D\}$ et tel que $g(A) = D$.
a) Montrer que $g(D) = B$.
b) Caractériser alors g .

Exercice 4 : (5 points)

- 1) Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par
$$\begin{cases} f(x) = (x+2)\ln(x+2) & \text{si } x \neq -2 \\ f(-2) = 0. \end{cases}$$

et (\mathcal{C}) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a) Montrer que f est continue à droite en (-2) .
- b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2) .
- c) Donner le tableau de variation de f .
- 2) Soit g la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $g(x) = f(x) - x\sqrt{4-x^2}$
et (\mathcal{C}') sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
a) Déterminer la position relative des courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .
b) Dans l'annexe ci-jointe (page 4), on a tracé la courbe (\mathcal{C}') de g .
Tracer la courbe (\mathcal{C}) dans le même repère.
- 3) Soit α un réel non nul appartenant à $[-2, 2]$.
On désigne par \mathcal{A}_α l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.
a) Montrer que $\mathcal{A}_\alpha = \int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2} dx$. (On distinguera les deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$).
b) Calculer \mathcal{A}_α .
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .



Exercice 5 : (4 points)

Pour tout entier naturel non nul n , on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = e^{-x} - x^{2n+1}$

- 1) Etudier les variations de f_n .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]0,1[$.

On définit ainsi sur \mathbb{N}^* , une suite (u_n) .

- 3) a) Soit n un entier naturel non nul et x un réel de l'intervalle $]0,1[$. Comparer les réels $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_{n+1}) < 0$.
c) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 4) a) Montrer que pour $n \geq 1$, $\ln(u_n) = -\frac{u_n}{2n+1}$.
b) Calculer la limite de la suite u_n .

Exercice 4

