Epreuve de Math Section Math Session de contrôle 2009

Exercice n°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-suites –fonction logarithme népérien-limites

CORRIGÉ

1) Réponse - c - 2) Réponse - a - 3) Réponse - c - 4) Réponse - c -

Exercice n°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction exponentielle - suites – calcul intégral.

CORRIGÉ

1) a- En posant $t = -x$ on aura $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} \left(\underbrace{-t}_{+\infty} - \underbrace{te^t}_{0} - \underbrace{e^t}_{0} \right) = +\infty$.

b- En posant $t = -x$ on aura $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x \right) = \lim\limits_{t \to -\infty} \left(-\underbrace{te^t}_{0} - \underbrace{e^t}_{0} \right) = 0$

Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c- Soit $x \in [0, +\infty[$; $f(x) - x = (x-1)e^{-x}$

- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessous de Δ .
- sur $[1, +\infty[$ la courbe $(\mathscr{C})$ est située au dessus de Δ .

2) a- f est définie et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$

de plus f est continue sur $[0, +\infty[$ donc $f([0, +\infty[) = [-1, +\infty[$.

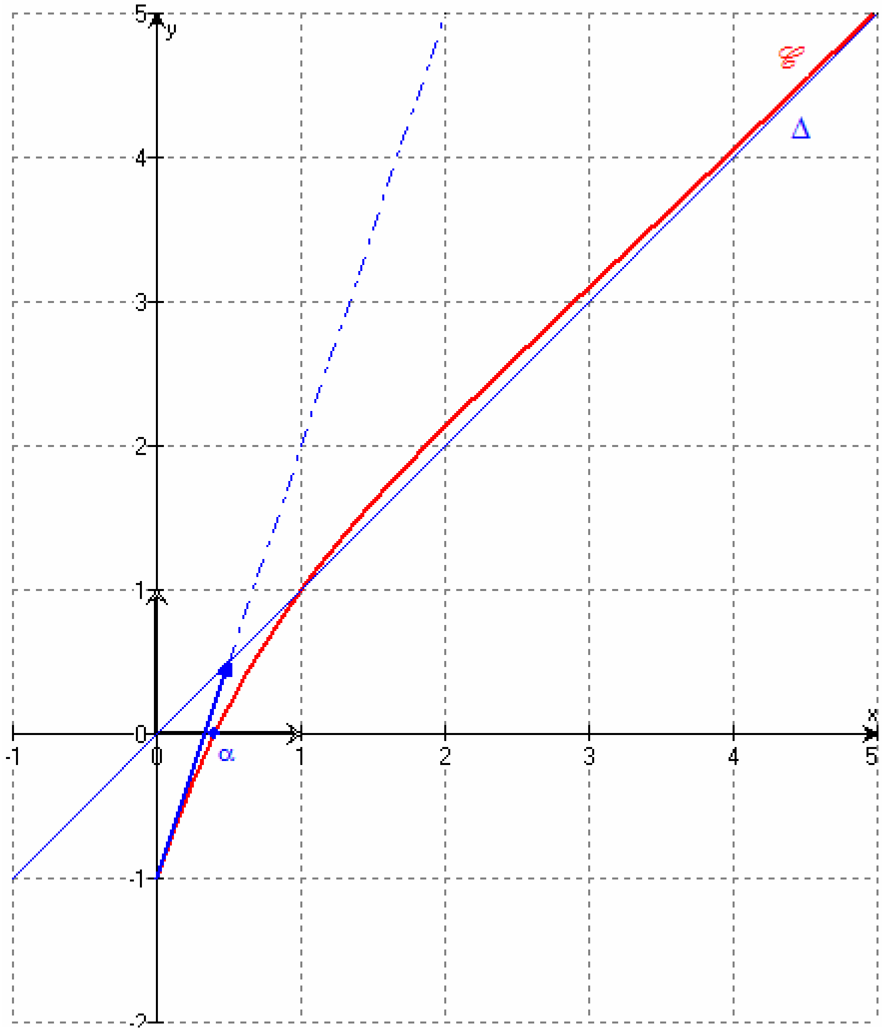
Comme $0 \in [-1, +\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0, +\infty[$ une solution unique α .

Puisque $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) > 0$ donc $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0,+\infty[$ une solution unique $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.

b- D'après le tableau de variation de la fonction f on a : $f'(0) = 3$

donc la demi tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 est de coefficient directeur 3.



3) a- $u_1 = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \int_\alpha^1 \left(x + (x-1)e^{-x}\right)dx = \int_\alpha^1 x\,dx + \int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx$

Or $\int_\alpha^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 = \frac{1}{2}(1-\alpha^2)$

$\int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx$ on intègre par parties on pose : $\begin{cases} u(x) = x-1 & \to & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-x} & \to & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Par suite $\int_\alpha^1 (x-1)e^{-x}dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 e^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_\alpha^1 = -\frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$

donc $u_1 = \int_\alpha^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(1-\alpha^2) - \frac{1}{e} + \alpha e^{-\alpha}$.

Interprétation : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [\alpha, 1]$ donc u_1 représente l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations : $y = 0$. $x = 1$ et $x = \alpha$

b- sur $[0,1]$ la courbe $(\mathscr{C})$ est situé au dessous de Δ donc pour tout réel $x \in [0,1]$, $f(x) \le x$

de plus pour tout $x \in [\alpha,+\infty[$, $f(x) \ge 0$ et $\alpha < 1$ ainsi pour tout $x \in [\alpha,1]$ on a : $0 \le f(x) \le x$

par suite $0 \le \int_{\alpha}^{1} [f(x)]^n dx \le \int_{\alpha}^{1} x^n dx$

d'où $0 \le u_n \le \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{1}$ or $\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{n+1} \le \dfrac{1}{n+1}$ donc $0 \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$

c- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $0 \le u_n \le \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice n°3

De quoi s'agit-il ?

Suites adjacentes

CORRIGÉ

1) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$.

- vérification : pour $n = 1$ l'inégalité $u_1 \le v_1$ est vraie (car $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et $v_1 = \dfrac{2}{5}$)
- soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $u_n \le v_n$ et montrons que $u_{n+1} \le v_{n+1}$

  Comme $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} = \dfrac{u_n - v_n}{15} \le 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc $u_{n+1} \le v_{n+1}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \le v_n$.

2) - $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n + v_n}{3} - u_n = -\dfrac{u_n - v_n}{3} \ge 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc (u_n) est une suite croissante.

- $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} - v_n = \dfrac{3(u_n - v_n)}{5} \le 0$ car $u_n - v_n \le 0$ donc (v_n) est une suite décroissante.

3)<u>Première méthode</u>

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le v_n$ et (v_n) est une suite décroissante donc (v_n) est majoré par $v_0 = 1$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le 1$.

  Ainsi (u_n) est une suite croissante et majoré par 1 donc converge.

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \ge u_n$ et (u_n) est une suite croissante donc (u_n) est minoré par $u_0 = 0$

  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \ge 0$.

Ainsi (v_n) est une suite décroissante et minoré par 0 donc converge.

- On pose $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = l'$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = l$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}) = l$

Comme $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3}$ donc les opérations sur les limites des suites donnent $l = \dfrac{2l + l'}{3}$

D'où $l = l'$

<u>Deuxième méthode</u>

D'après ce qui précède on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{15}(u_n - v_n)$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

vérification : l'égalité $u_0 - v_0 = -\left(\frac{1}{15}\right)^0$ est vraie (car $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et $-\left(\frac{1}{15}\right)^0 = -1$)

supposons que $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

montrons que $u_{n+1} - v_{n+1} = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

on a : $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{15}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right] = -\left(\frac{1}{15}\right)^{n+1}$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{15}\right)^n$

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{1}{15}\right)^n\right] = 0$ car $\left(\frac{1}{15}\right) \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Compte tenu :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
- (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite

4) a- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 9u_{n+1} + 5v_{n+1} = 3(2u_n + v_n) + (3u_n + 2v_n) = 9u_n + 5v_n = w_n$

Donc (w_n) est une suite constante.

b- (w_n) est une suite constante donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 = 9u_0 + 5v_0 = 5$.

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9u_n + 5v_n = 5$.

Donc si L est la limite commune des suites (u_n) et (v_n) on aura $9L + 5L = 5$

Ce qui donne $L = \frac{5}{14}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \frac{5}{14}$.

Exercice n°4

De quoi s'agit-il ?

Similitudes-angles inscrits –symétrie orthogonale.

CORRIGÉ

1) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \qquad \text{donc} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

De plus, comme ABC est un triangle rectangle en B donc $\frac{CB}{CA} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

D'où $\begin{cases} \frac{CB}{CA} = \frac{1}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui justifie que $S(A) = B$

b- • D'une part $\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

$$\equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)\ [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$$

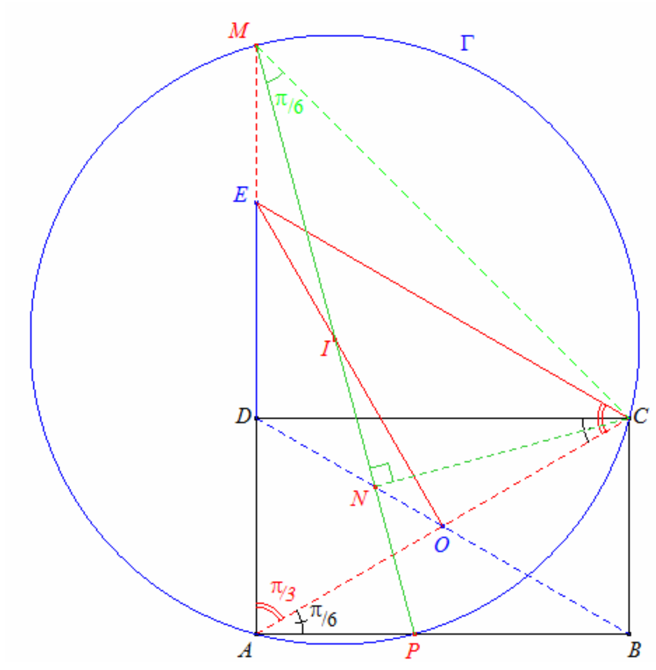
D'autre part $\left.\begin{array}{l} E = S_{(DC)}(A) \\ D = S_{(DC)}(D) \\ C = S_{(DC)}(C) \end{array}\right\}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\ [2\pi]$

Ainsi $\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{EC},\overrightarrow{ED}}\right)\ [2\pi] \\ \qquad\qquad\quad \equiv -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle ACE est équilatéral.

□ On a le triangle ACE est équilatéral et $O = A*C$ donc $\begin{cases} \dfrac{CO}{CE} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CO}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

Conclusion : $\mathrm{S}(E) = O$.

2) a-



b- ACE est un triangle équilatéral et $O = A*C$ donc la droite (OE) est la médiatrice du segment $[AC]$

et puisque $I \in [OE] \setminus \{O, E\}$ donc $IA = IC$ or (Γ) est le cercle de centre I et le rayon IA

donc $C \in (\Gamma)$.

3) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right)$ sont deux angles inscrits dans (Γ) interceptant le même arc orienté $\overset{\frown}{PC}$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right)\ [2\pi]$ or $\left(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

b- Comme $\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ \left(\widehat{\overrightarrow{NC},\overrightarrow{NM}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CN}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ (I) de plus on a $\dfrac{CN}{CM} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ (II)

d'après (I) et (II) on en déduit $S(M) = N$

4) $M \in (AD)$ et $E \in (AD)$ donc A , E et M sont alignés de plus $\left.\begin{array}{l} S(A) = B \\ S(E) = O \\ S(M) = N \end{array}\right\}$

et comme toute similitude conserve l'alignement donc B , O et N sont alignés.

D'où $N \in (OB)$ et puisque $D \in (OB)$ on en déduit alors que B , D et N sont alignés.

Exercice n°5

De quoi s'agit-il ?

Résolution dans Z^2 d'une équation du type ax +by = c – détermination des points d'une droite à coordonnées entières

CORRIGÉ

1) a- $3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8$ donc $(0,-2)$ est solution de (E).

b- Soit $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ solution de (E).

On a : $\left.\begin{array}{l} 3 \times x + 4 \times y = -8 \\ 3 \times 0 + 4 \times (-2) = -8 \end{array}\right\}$ donc $3 \times x = -4 \times (y+2)$

comme $\left.\begin{array}{l} 3 / -4 \times (y+2) \\ 3 \wedge (-4) = 1 \end{array}\right\}$ alors d'après Gauss $3/(y+2)$ ainsi $y = 3k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$

par suite $3 \times x = -4 \times (3k)$ d'où $x = -4k$ ainsi $(x, y) = (-4k , 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

réciproquement : soit $(x, y) = (-4k , 3k - 2)$ où $k \in \mathbb{Z}$

on a : $3 \times (-4k) + 4 \times (3k - 2) = -8$ donc (x, y) est solution de (E).

Conclusion : $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (-4k , 3k - 2) , k \in \mathbb{Z} \}$

2) a- $\left\{\begin{array}{l} M(x, y) \in \Delta \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}\right.$ signifie $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = -8 \\ (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}\right.$ signifie $(x, y) = \{ (-4k , 3k - 2) , k \in \mathbb{Z} \}$

Donc $AM = \sqrt{(-4k)^2 + (3k)^2} = 5 \times |k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Par suite AM est un multiple de 5.

b- $N(x,y) \in \Delta$ signifie $3x + 4y = -8$ signifie $y = -\dfrac{8+3x}{4}$

Donc $AN^2 = x^2 + \left(-\dfrac{3x}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}x^2$ par suite $AN = \dfrac{5}{4}|x|$.

c- Si AN est un multiple de 5 alors il s'écrit sous la forme $AN = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc $\dfrac{5}{4}|x| = 5|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ ainsi $|x| = 4|k|$ où $k \in \mathbb{Z}$ d'où x est un entier

Comme $y = -\dfrac{8+3x}{4} = -2 - \dfrac{3x}{4}$ donc y = -2+3k où $k \in \mathbb{Z}$ d'où y est un entier

Conclusion : Si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.