REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Soit z un nombre complexe de module 2.

Alors le conjugué $\bar{z}$ de z est égal à

a) $\frac{\sqrt{2}}{z}$

b) $\frac{2}{z}$

c) $\frac{4}{z}$

2) Dans Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i . L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z-i}{z-1}$ est réel est

a) la droite (AB) privée de A

b) le segment [AB] privé de A

c) le cercle de diamètre [AB] privé de A

3) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $(-\ln 2)$. Alors la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ est

a) une suite arithmétique de raison (– 2)

b) une suite géométrique de raison (– 2)

c) une suite géométrique de raison $(\frac{1}{2})$

4) La limite de $x\ln(1+\frac{2}{x})$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à

a) 0

b) 1

c) 2

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

2) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	3	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans $\mathbb{R}_+$, une seule solution α et vérifier que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

b) Tracer la droite Δ et la courbe $\mathscr{C}$.
(On précisera la demi tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et on prendra $\alpha \simeq 0{,}4$).

3) On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_\alpha^1 [f(x)]^n \, dx$.

a) Calculer u_1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 9u_n + 5v_n$

a) Montrer que (w_n) est une suite constante.

b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 (5 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 4/4), ABCD est un rectangle de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1) a) Justifier que $S(A) = B$

b) Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que $S(E) = O$.

2) Soit I un point du segment [EO], distinct des points O et E et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.

Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.

a) Tracer (Γ) et placer les points M et P.

b) Justifier que le point C appartient à (Γ).

3) Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

b) En déduire que $S(M) = N$.

4) Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice 5 (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x + 4y = -8$.

1) a) Vérifier que $(0, -2)$ est une solution de (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ dont une équation est : $3x + 4y + 8 = 0$ et on désigne par A le point de Δ d'abscisse 0.

a) Montrer que si M est un point de Δ à coordonnées entières alors AM est un multiple de 5.

b) Soit N un point de Δ de coordonnées (x, y).

Vérifier que $AN = \frac{5}{4}|x|$.

c) En déduire que si AN est un multiple de 5 alors x et y sont des entiers.

Section : …………… N° d'inscription : ………… Série : …………

Nom et prénom : ………………………………………………………

Date et lieu de naissance : ………………………………………………

Signature des Surveillants

………………

………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4