REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION DE CONTRÔLE

SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES **DUREE : 4 heures** **COEFFICIENT : 4**

EXERCICE 1 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{\cos^2 t}{t}\, dt$.

Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes, en justifiant la réponse.

1) Pour tout $x > 0$, $f'(x) \geq 0$.
2) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq 0$.
3) $f(2) \leq \ln 2$.

EXERCICE 2 (6 points)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f_p(x) = p(\ln x) - x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A-1) Etudier les variations de la fonction f_3: $x \mapsto 3\ln x - x$.

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées u_3 et v_3 , appartenant respectivement aux intervalles $]1, 3[$ et $]3, +\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p \geq 3$.

x	0		p		$+\infty$
$f_p'(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	$\nearrow$	$p(\ln p) - p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle $]1, p[$ tel que $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p \geq 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).

2) On a représenté dans la **figure 1** de l'annexe ci jointe les courbes C_3 , C_4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3 , f_4 , f_5 et f_6.

a) Placer sur l'axe des abscisses les termes u_3, u_4, u_5 et u_6 de la suite (u_p).

b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $f_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p \geq 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.

b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\frac{\ln u_p}{u_p} = \frac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).

EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(1,3,2), B(1,-1,-2) et C(2,4,1) .

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$.

2) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ).

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

a) Déterminer le rayon de la sphère S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (Γ').

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

EXERCICE 4 (6 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle OAB est rectangle isocèle en O et de sens direct.

H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB), A' est le point du segment [OH] tel que $OA' = \frac{1}{2}OA$ et H' est le projeté orthogonal du point A' sur la droite (OB).

Soit f la similitude directe de centre O qui envoie A en A'.

1) Déterminer le rapport et l'angle de f.

2) On note B' l'image du point B par la similitude directe f.

   a) Déterminer la nature du triangle $OA'B'$.

   b) Construire le point B'.

   c) Montrer que $f(H) = H'$.

3) Soit I le milieu du segment $[A'B]$ et J le milieu du segment $[AA']$.

   a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie J en O et I en H.

   b) Montrer que R est une rotation dont on déterminera l'angle.

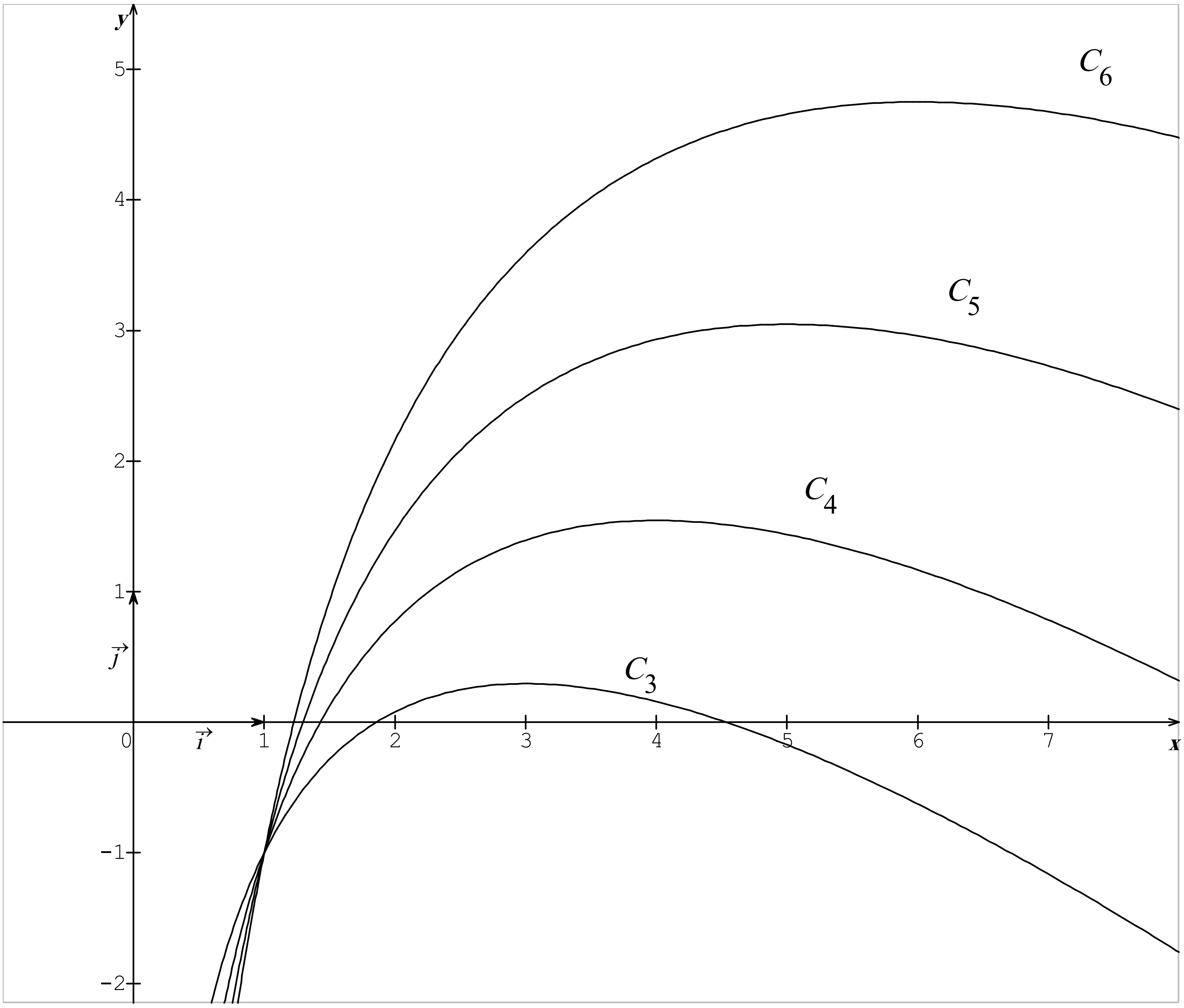
   c) Soit K le milieu du segment $[AB']$. Montrer que $JK = OH'$ et que $(\overrightarrow{JK},\overrightarrow{OH'}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

   d) Déterminer alors $R(K)$.

   e) En déduire que $IK = HH'$ et que (IK) et (HH') sont perpendiculaires.

4) Montrer que le quadrilatère $IHKH'$ est un carré.

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 figure 2