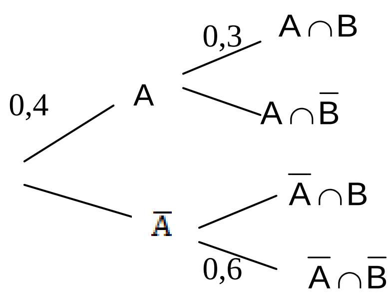
MATHS

Section : Mathématiques

Session de contrôle

Exercice 1

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

1) $p(\overline{A}) = 0,6$.
2) La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7.
3) $p(B)=0,7$.
4) $p(A\cup B) = 0,64$.

Contenu

- *Probabilité d'un évènement*
- *Probabilité conditionnelle*

Solutions

1. Vrai. En effet : $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.

2. Vrai. En effet : $p(\overline{B}|A) = 1 - p(B|A) = 1 - 0,3 = 0,7$.

3. Faux. Car $p(B) = p(B\cap A) + p(B\cap\overline{A}) = p(A)\times p(B|A) + p(\overline{A})\times p(B|\overline{A})$

$$= p(A)\times p(B|A) + p(\overline{A})\left(1 - p(\overline{B}|\overline{A})\right) = 0,4\times 0,3 + 0,6\times 0,4 = 0,36.$$

4. Vrai. En effet : $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0,4 + 0,36 - 0,12 = 0,64$.

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)\,a\,z + i\,a^2 = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

a) Montrer que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\,a$.

b) Calculer l'affixe du point Q.

c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Contenu

- *Equation du second degré dans* $\mathbb{C}$
- *Affixe d'un point, point image*
- *Configuration du plan*

Aptitudes visées :

- *Résoudre une équation du second degré dans* $\mathbb{C}$
- *Déterminer l'affixe d'un point*
- *Exploiter des écritures complexes pour montrer l'alignement de trois points.*

Solutions

1. $\Delta = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = \left[(1-i)a\right]^2$. On en déduit que $z_1 = a$ et $z_2 = ia$. $S_{\mathbb{C}} = \{a, ia\}$.

2. **a)** Puisque $z_{\overrightarrow{OA}} = a$ et $z_{\overrightarrow{OB}} = ia$ donc $\begin{cases} OA = OB = |a| = a \\ \dfrac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = i \end{cases}$ d'où $OA = OB$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

On en déduit que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.

b) On sait que le triangle OAB est rectangle isocèle en O, par suite OACB est un carré si et seulement si $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à $(z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}})$ équivaut à $(a = z_C - ia)$ équivaut à $(z_C = a + ia.)$

Ainsi OACB est un carré si et seulement si $z_C = a + ia$.

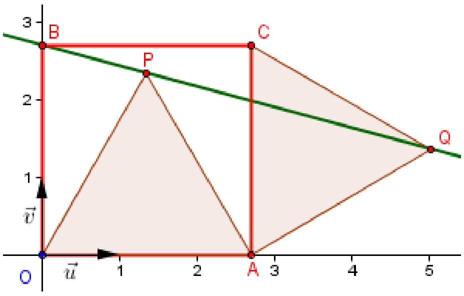
3. **a)** Le triangle OAP est équilatéral de sens direct donc P est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

par suite $z_P = e^{i\frac{\pi}{3}}a$, on en déduit que $z_P = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$.

b) Le triangle AQC est équilatéral de sens direct donc Q est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

par suite $z_Q = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) + z_A$, on en déduit que $z_Q = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(ia) + a = a\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$.

c) $\dfrac{z_P - z_B}{z_Q - z_B} = \dfrac{\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \dfrac{1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)}{2 + \sqrt{3} - i} = \dfrac{\left(1 + i\left(\sqrt{3} - 2\right)\right)\left(2 + \sqrt{3} + i\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + 1} = \dfrac{2}{3 + \sqrt{3}}.$



Il en résulte que $\dfrac{z_{\overrightarrow{BP}}}{z_{\overrightarrow{BQ}}}$ est réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BQ}$ sont colinéaires par suite les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : 7 x + 18 y = 9.

a) Montrer que le couple (9,–3) est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Contenu

- *Equation de type a x + b y = c   où a, b et c sont des entiers*

Aptitudes visées :

- *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ une équation de type a x + b y = c   où a, b et c sont des entiers*
- *Résoudre un problème d'arithmétique*

Solutions

1. a) $7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9 \times (7 - 6) = 9$ donc $(9, -3)$ est solution de (E).

b) On sait que $(9, -3)$ est solution de (E), donc $7x + 18y = 7 \times 9 + 18 \times (-3) \Leftrightarrow 7(x - 9) = 18(-y - 3)$. $(*)$

7 divise $18(-y - 3)$ et $7 \wedge 18 = 1$ donc d'après Gauss que 7 divise $-y - 3$ donc $-y - 3 = 7k,\ k \in \mathbb{Z}$

Par suite $y = -7k - 3,\ k \in \mathbb{Z}$. En remplaçant y par sa valeur dans $(*)$, on obtient $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $7(18k + 9) + 18(-7k - 3) = 7 \times 9 + 18 \times (-3) = 9$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(18k + 9, -7k - 3), k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\begin{cases} n \equiv 6 \ (\text{mod } 7) \\ n \equiv 15 \ (\text{mod } 18) \end{cases}$ si et seulement s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} n = 6 + 7x \\ n = 15 + 18y \end{cases}$ donc $6 + 7x = 15 + 18y$

d'où $7x + 18(-y) = 9$. D'après 1) b) il en résulte que $x = 18k + 9,\ k \in \mathbb{Z}$, par suite $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement : Si $n = 69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}$, comme $\begin{cases} 126 = 18 \times 7 \\ 69 \equiv 6 \ (\text{mod } 7) \\ 69 \equiv 15 \ (\text{mod } 18) \end{cases}$ alors $\begin{cases} n \equiv 6 \ (\text{mod } 7) \\ n \equiv 15 \ (\text{mod } 18) \end{cases}$.

On en déduit que $S_{\mathbb{Z}} = \{69 + 126k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

   b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

   b) En déduire que S(D) = K.

   c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).

   d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que SoS(A) = E.

   e) Construire Ω.

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Contenu

- *Similitude directe*
- *Image d'une configuration de base par une similitude directe*

Aptitudes visées :

- *Reconnaître une similitude directe.*
- *Construction du centre d'une similitude directe*
- *Montrer que trois droites sont concourantes*

Solutions

1. Le rapport de S est $k = \frac{OJ}{AB} = \frac{\frac{1}{2}AD}{AD} = \frac{1}{2}$.

Une mesure de l'angle de S est $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OJ}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2. a) $S(B) = J$ donc $S((BC))$ est la droite passant par J et perpendiculaire à (BC) d'où $S((BC)) = (CD)$.

$S(A) = O$ donc $S((AC))$ est la droite passant par O et perpendiculaire à (AC) d'où $S((AC)) = (BD)$.

b) $C \in (AC) \cap (BC)$ donc $S(C) \in S((AC)) \cap S((BC)) = (BD) \cap (CD) = \{D\}$ d'où $S(C) = D$.

a) Le carré ABCD est un carré direct donc son image par S est un carré direct.

$S(A) = O$, $S(B) = J$, $S(C) = D$ et le carré OJDK est un carré direct, on en déduit que l'image du carré ABCD par S est le carré OJDK.

b) Puisque l'image du carré ABCD par S est le carré OJDK or $S(A) = O$, $S(B) = J$ et $S(C) = D$,

on en déduit que $S(D) = K$.

c) On a $S(C) = D$ et $S(D) = K$ donc $S \circ S(C) = K$, or $S \circ S$ est la similitude directe de centre Ω, de rapport $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \ [2\pi]$ donc $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$. Il en résulte que $\overrightarrow{\Omega K} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\Omega C}$ donc $\overrightarrow{\Omega C} + 4\overrightarrow{\Omega K} = \vec{0}$ par suite Ω est le barycentre des points pondérés $(C,1)$ et $(K,4)$.

d) $S \circ S(A) = S(O)$, or O est le milieu de $[AC]$ donc $S(O)$ est le milieu de $[S(A)S(C)] = [OD]$, il en résulte que $S(O) = E$ par suite $S \circ S(A) = E$.

e) On sait que $S \circ S$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ et $S \circ S(A) = E$ donc Ω appartient à la droite (AE) d'où Ω est le point d'intersection des droites (AE) et (KC). D'où la construction de Ω.

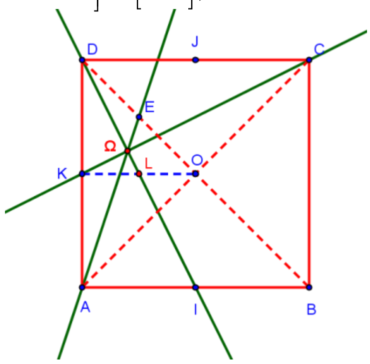
4. Les droites (AE) et (CK) sont sécantes en Ω.

Soit L le milieu de $[OK]$, puisque K est le milieu de $[AD]$ donc $S(K)$ est le milieu de $[S(A)S(D)] = [OK]$, il en résulte que $S(K) = L$ par suite $S \circ S(D) = L$. On en déduit que $\Omega \in (DL)$.

Montrons que $I \in (DL)$. soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2.

$h(K) = A$ et $h(O) = B$ donc $h(L) = I$. Il en résulte que $I \in (DL)$ et par suite $\Omega \in (DI)$.

On en déduit que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes en Ω.



Exercice 5

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) = 1 + x – x lnx.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3{,}5 < x_0 < 3{,}6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \frac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\frac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.

Contenu

- *Fonction ln : continuité, dérivabilité, branches infinies , variation, courbe représentative .*
- *Théorème de la bijection*
- *Calcul intégral, suite réelle.*

Aptitudes visées :

- *Déterminer le signe d'une expression*
- *Etudier les variations d'une fonction. Déterminer un extremum d'une fonction*
- *Etudier une suite définie par une intégrale*
- *Encadrer la limite d'une suite réelle.*

Solutions

1. **a)** La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$,

$$g'(x) = 1-\left(\ln x + x\frac{1}{x}\right) = -\ln x.\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1+x-x\ln x = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x)(1-\ln x) = -\infty.$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
g	1	↗	2	↘	$-\infty$

b) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0,1]$ donc $g(]0,1]) =]1,2]$, par suite $g(x) > 0$ sur $]0,1]$.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur $g(]1,+\infty[) =]-\infty,2[$, $0 \in]-\infty,2[$ donc il existe un unique réel x_0 de $]1,+\infty[$ tel que $g(x_0) = 0$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

La fonction g est continue sur $[3.5,3.6]$ et $g(3,5) \approx 0,11 > 0$ et $g(3,6) \approx -0,01 < 0$ d'où $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) Pour tout $x \in]0,1]$, on a $g(x) > 0$.

g est strictement décroissante sur $[1,x_0[$ et $g(x_0) = 0$ donc $g(x) > g(x_0) = 0$, pour tout $x \in [1,x_0[$.

g est strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$ et $g(x_0)=0$ donc $g(x)<g(x_0)=0$, pour tout $x\in]x_0,+\infty[$.

x	0 $\qquad x_0 \qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\qquad 0 \qquad$ $-$

2. a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1+x^2)-2x\ln x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-x^2\ln(x^2)}{x(1+x^2)^2}=\frac{g(x^2)}{x(1+x^2)^2}$$

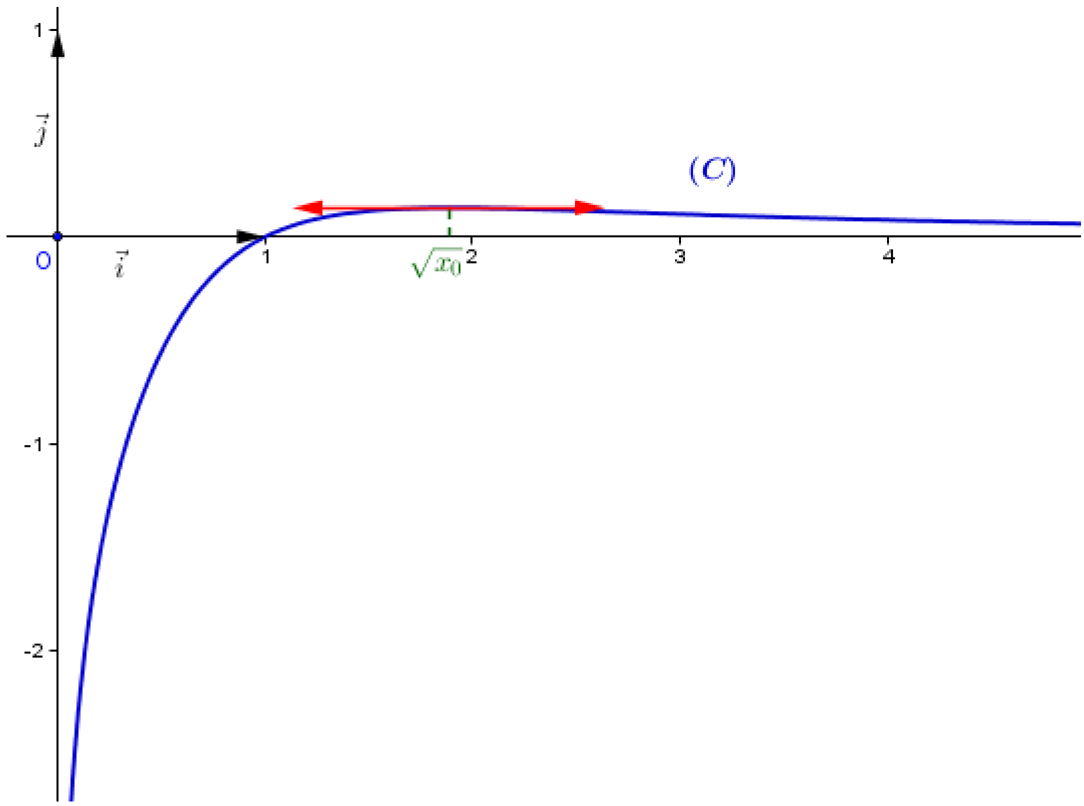
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x^2)$. $\begin{cases} g(x^2)=0 \\ x\in]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=x_0 \\ x\in]0,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{x_0}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1}{x}+x}=0.$$

x	0 $\qquad \sqrt{x_0} \qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\qquad 0 \qquad$ $-$
f	$-\infty \nearrow f(\sqrt{x_0}) \searrow 0$

c) $f(\sqrt{x_0})=\frac{\ln\sqrt{x_0}}{1+x_0}=\frac{\ln x_0}{2(1+x_0)}$ or $g(x_0)=0$ donc $\ln x_0=\frac{1+x_0}{x_0}$ d'où $f(\sqrt{x_0})=\frac{\frac{1+x_0}{x_0}}{2(1+x_0)}=\frac{1}{2x_0}$.

d)



3. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, soit F la primitive de f sur $]0,1]$ qui s'annule en 1, il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$a_n=F\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour tout $x \in\ 0,1$, on a $f\ \ x\ \ \leq 0$ donc F est décroissante sur $0,1$, or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} \leq 1$

donc $F\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \geq F\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'où $a_n \leq a_{n+1}$ par suite $\ a_n\ $ est croissante.

b) Pour tout $x \in\ 0,1$, $1 \leq 1+x^2 \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$, comme $\ln x < 0,\ x \in]0,1[$ donc

$\ln x \leq \dfrac{\ln x}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{2}\ln x$ d'où $\ln x \leq f\ \ x\ \ \leq \dfrac{1}{2}\ln x$.

c) Pour tout $x \in\ 0,1$, $\ln x \leq f\ \ x\ \ \leq \dfrac{1}{2}\ln x$, les fonctions f, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln x$ sont continues sur $\left[\dfrac{1}{n},1\right]$

donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f\ \ x\ \ dx \leq \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x\,dx$ d'où $\ x\ln x - x\ {}_{\frac{1}{n}}^{1} \leq -a_n \leq \dfrac{1}{2}\ \ x\ln x - x\ {}_{\frac{1}{n}}^{1}$ par suite

$-1-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n} \leq -a_n \leq \dfrac{1}{2}\left(-1-\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n \geq 0$ donc $1-\dfrac{1+\ln n}{n} \leq 1$, ainsi $\ a_n\ $ est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

De plus $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1+\ln n}{n}\right) = 1$. On en déduit que $\displaystyle\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to+\infty} a_n \leq 1$.