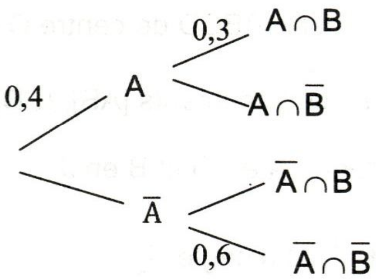
REPUBLIQUE TUNISIENNE ◇◇◇ MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : mathématiques		Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 (3 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre de probabilité suivant :



Répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes en justifiant la réponse :

1) $p(\overline{A}) = 0,6$.
2) La probabilité de $\overline{B}$ sachant A est égale à 0,7.
3) $p(B)=0,7$.
4) $p(A \cup B) = 0,64$.

Exercice 2 (4 points)

Soit a un réel strictement positif.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+i)\,a\,z + i\,a^2 = 0$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On désigne par A et B les points d'affixes respectives a et ia.

   a) Quelle est la nature du triangle OAB ?

   b) Déterminer l'affixe du point C tel que OACB soit un carré.

3) Soient P et Q les points du plan tels que les triangles OAP et AQC sont équilatéraux de sens direct.

   a) Montrer que l'affixe de P est égale à $(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\,a$.

   b) Calculer l'affixe du point Q.

   c) Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 3 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $7x + 18y = 9$.

a) Montrer que le couple $(9,-3)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod 7 \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

Exercice 4 (5 points)

On considère dans le plan orienté un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [AD].

Soit S la similitude directe qui transforme A en O et B en J.

1) Montrer que S est de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Déterminer les images des droites (BC) et (AC) par S.

b) En déduire S(C).

3) a) Déterminer l'image du carré ABCD par S.

b) En déduire que S(D) = K.

c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (C ,1) et (K , 4).

d) Soit E le milieu du segment [OD]. Montrer que $S\circ S(A) = E$.

e) Construire Ω.

4) Montrer que les droites (AE), (CK) et (DI) sont concourantes.

Exercice 5 (5 points)

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x\ln x$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]0,+\infty[$.

Vérifier que $3,5 < x_0 < 3,6$.

c) En déduire le signe de g.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(x^2)}{x\,(1+x^2)^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\sqrt{x_0}) = \dfrac{1}{2\,x_0}$.

d) Tracer la courbe (C). (On prendra $x_0 \approx 3{,}6$)

3) Soit (a_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $a_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$.

a) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,1[$, $\ln x \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}\ln x$.

c) En déduire que $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1+\ln n}{n}\right) \leq a_n \leq 1-\dfrac{1+\ln n}{n}$.

d) Montrer alors que la suite (a_n) est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2},1]$.