EPREUVE DE MATH ***SECTION MATH*** **SESSION PRINCIPALE 2009**

EXERCICE N°1

De quoi s'agit-il ?

Nombres complexes-Rotations-arithmétique-Probabilités

SOLUTION

1) Réponse - b - 2) Réponse - c - 3) Réponse - c - 4) Réponse - b -

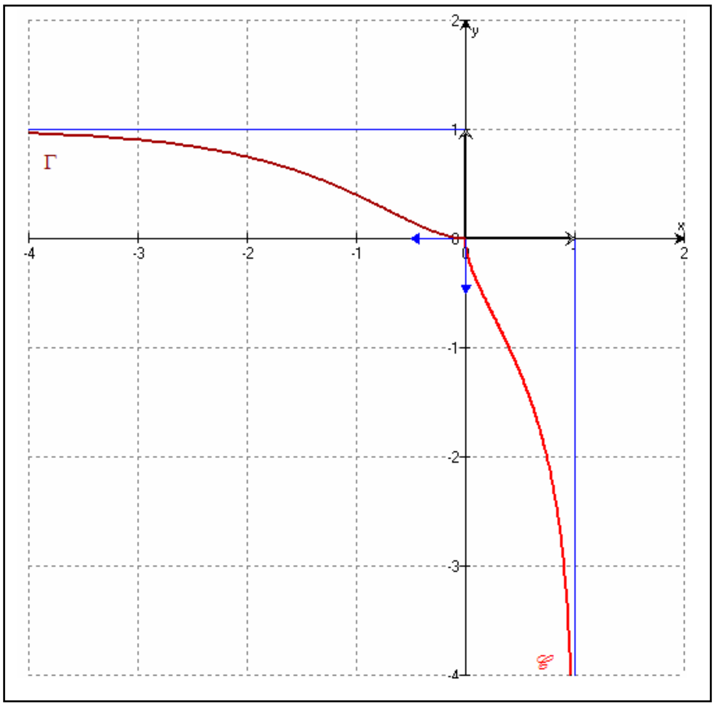
EXERCICE N°2

De quoi s'agit-il ?

Fonction logarithme népérien-Fonction exponentielle-Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone-calcul intégral-Calcul d'aire

SOLUTION

1) a- En posant $t=-\sqrt{x}$ on aura $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0^-}\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0^-}\left(\dfrac{1}{t}\times\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)=-\infty$.



b- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=-\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0

et $(\mathscr{C})$ admet au point O une

demi-tangente verticale dirigé vers le bas.

2) a- f est définie et strictement décroissante

sur $[0,1[$ donc réalise une bijection de

$[0,1[$ sur $f([0,1[)$ de plus f est continue sur

$[0,1[$ donc $f([0,1[)=]-\infty,0]$.

Conclusion : f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)=]-\infty,0]$.

b- $(\Gamma)=S_{D:y=x}(\mathscr{C})$

$(\mathscr{C})$ admet au point O une demi-tangente verticale donc (Γ) admet en ce poi...

une demi-tangente horizontale.

3) a- On a : $\begin{cases} x \in]-\infty, 0] \\ f^{-1}(x) = y \end{cases}$, si et seulement si $\begin{cases} y \in [0,1[\\ f(y) = x \end{cases}$

$x = f(y) = \ln\left(1-\sqrt{y}\right) \Leftrightarrow e^x = 1-\sqrt{y} \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1-e^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \left(1-e^x\right)^2$.

b- $\mathcal{A} = \int_{-\ln 2}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \int_{-\ln 2}^{0} \left(1-2e^x+e^{2x}\right)dx = \left[x-2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-\ln 2}^{0} = \left(-2+\frac{1}{2}\right)-\left(-\ln 2-\frac{2}{e^{\ln 2}}+\frac{1}{2e^{\ln 4}}\right)$

donc $\mathcal{A} = \ln 2 - \frac{5}{8}$ u.a

c- En utilisant la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ on aura :

$-\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left|f(x)\right| dx = \frac{1}{4}\times\ln 2 - \mathcal{A} = \frac{\ln 2}{4} - \ln 2 + \frac{5}{8}$ ($f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(-\ln 2) = \frac{1}{4}$)

D'où $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}$

Autrement : $\mathcal{A} = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(f(x)-(-\ln 2)\right)dx = \ln 2 - \frac{5}{8}$ donc $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln\left(1-\sqrt{x}\right)dx = \ln 2 - \frac{5}{8} - \frac{1}{4}\ln 2 = \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}$

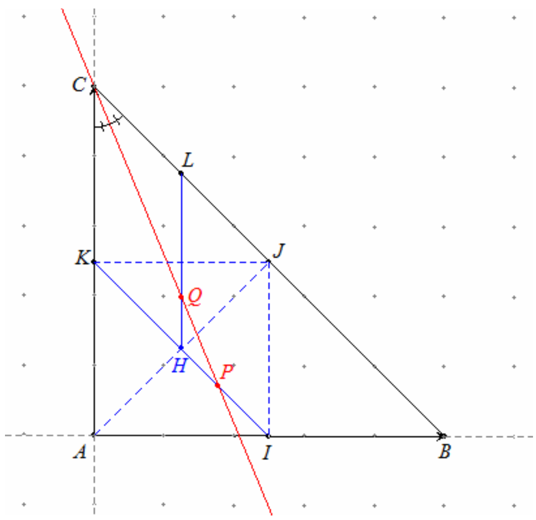
EXERCICE N°3

De quoi s'agit-il ?

Similitude directe –Similitude indirecte-symétrie orthogonale –Composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale.

SOLUTION

1) voir figure ci-contre.



2) a- $\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ est une mesure de l'angle de f

en effet :

$\begin{cases} \overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} \text{ car } J = B*C,\ K = A*C \text{ et } I = A*B \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ AI = AK \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A,\ K = A*C \text{ et } I = A*B \end{cases}$

donc AIJK est un carré direct dont $[JA]$ est une diagonale

ainsi $\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

Autrement :

$(JK)//(AB)$ car dans le triangle ABC on a : $J = B*C$ et $K = A*C$

donc $\left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\ [2\pi]$

or $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ car ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct

par suite $\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JC}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JK}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ d'où $\left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

- $\frac{JK}{JA} = \frac{\frac{1}{2}BA}{\frac{1}{2}BC} = \frac{BA}{BC} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est le rapport de f .

b- $\begin{cases} \frac{JL}{JK} = \frac{\frac{1}{4}BC}{\frac{1}{2}BA} = \frac{BC}{2BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \left(\widehat{\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \end{cases}$ d'où $f(K) = L$.

c- $\begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{JI},\overrightarrow{JH}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{JA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AJ}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \\ \frac{JH}{JI} = \frac{\frac{1}{2}JA}{\frac{1}{2}AC} = \frac{\frac{1}{2}BC}{BA} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ d'où $f(I) = H$.

3) a- $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + \frac{1}{2}(1+i)$ est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

donc φ est une similitude indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Or $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_C} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{i}{2}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}(i-1) + \frac{1}{2}(1+i) = i = z_C$ d'où $\varphi(C) = C$

et comme $|a| \neq 1$ donc C est l'unique point invariant par f qui n'est autre que le centre.

b- - $z_I = \frac{1}{2}$ - $z_K = \frac{1}{2}i$ - $z_J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ - $z_H = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

c- - $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_I} + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i) + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{4}(1+i) = z_H$ d'où $\varphi(I) = H$.

- $-\frac{1}{2}(1+i)\overline{z_J} + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{4}(1+i)(1-i) + \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{2}i = z_K$ d'où $\varphi(J) = K$.

d- $\begin{cases} \bullet f \circ S_{(IK)}(I) = f(I) = H \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(I) = H \\ \bullet f \circ S_{(IK)}(J) = f(A) = K \text{ donc } f \circ S_{(IK)}(J) = K \\ \bullet f \circ S_{(IK)} \text{ est une similitude indirecte comme composée} \\ \quad \text{d'une similitude directe et antidéplacement} \end{cases}$

Donc $f \circ S_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts

par suite $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.

4) a- La droite Δ est porté par la bissectrice intérieur de $(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CK})$ (ou $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CH})$)

b- □ $P \in (IK)$ alors $S_{(IK)}(P) = P$ par suite $\varphi(P) = f \circ S_{(IK)}(P) = f(P)$ donc $\varphi(P) = f(P)$.

□ $P \in (IK)$ alors $f(P) \in f\langle(IK)\rangle = (LH)$ par suite $\varphi(P) \in (LH)$

$P \in \Delta$ et Δ étant l'axe de φ alors $\varphi(P) \in \varphi(\Delta) = \Delta$

Ainsi $\varphi(P) \in \Delta \cap (LH) = \{Q\}$ par conséquent $\varphi(P) = Q$.

EXERCICE N°4

De quoi s'agit-il ?

Ellipse-équation de la tangente à une ellipse en l'un de ses points-Aire d'un triangle

SOLUTION

1) a- L'ellipse $(\mathcal{E})$ a pour équation, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$a = 1$, $b = 2$ et comme $a < b$, l'axe focal est $(O, \vec{j})$.

Les sommets suivant l'axe focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -2)$ et $(0, 2)$

Les sommets suivant l'axe non focal de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$

Comme $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3}$ donc les foyers de $(\mathcal{E})$ ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{3})$ et $(0, \sqrt{3})$

b- voir figure ci-contre

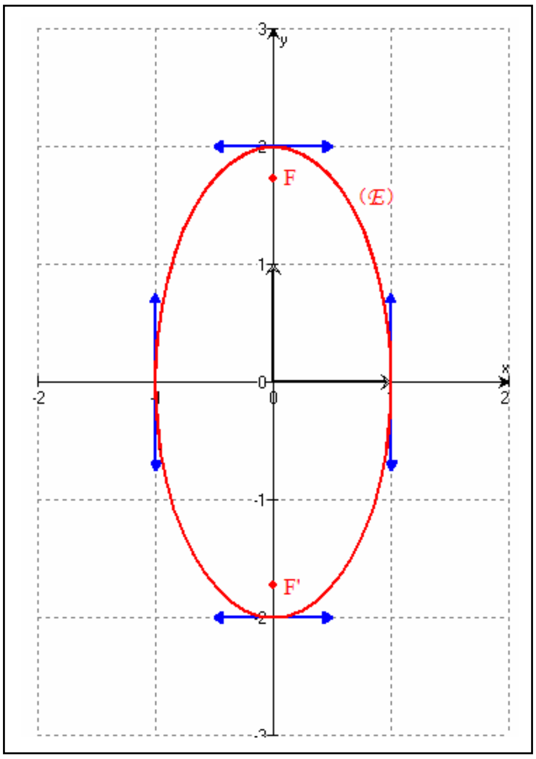
c- $\frac{\cos^2 x}{1^2} + \frac{4\sin^2 x}{2^2} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $\mathrm{M} \in (\mathcal{E})$

2) Une équation de la tangente à $(\mathscr{E})$ en un point $M(x_0, y_0)$ est :

$T: \frac{xx_0}{1^2}+\frac{yy_0}{2^2}=1$ par suite pour $M(\cos\theta, 2\sin\theta)$ on aura

$T: x\cos\theta+\frac{2y\sin\theta}{4}=1$ d'où $T: 2x\cos\theta+y\sin\theta-2=0$.

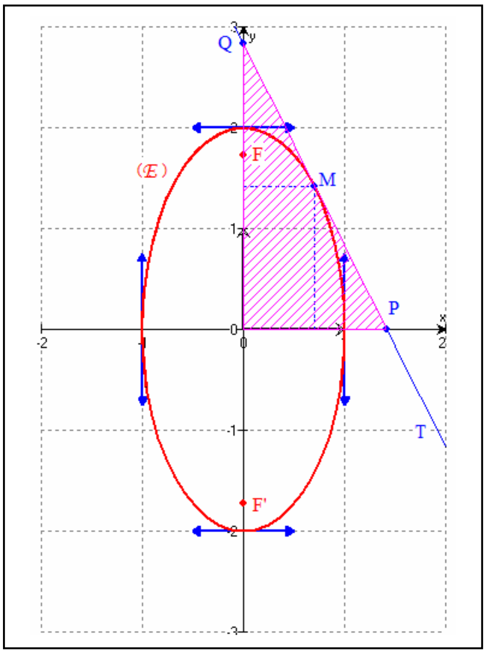


3) a- Le triangle OPQ est rectangle en O

donc l'aire $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times OP\times OQ$

Or $\begin{cases} P\in(O,\vec{i}) \\ P\in T\end{cases}$ donc $\begin{cases} y_p=0 \\ 2x_p\cos\theta=2\end{cases}$ d'où $P\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$

de même $\begin{cases} Q\in(O,\vec{j}) \\ Q\in T\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_Q=0 \\ y_Q\sin\theta=2\end{cases}$ d'où $Q\left(0, \frac{2}{\sin\theta}\right)$



De plus $\cos\theta>0$ et $\sin\theta>0$ pour tout $\theta\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{2}{\sin\theta}=\frac{2}{2\cos\theta\sin\theta}=\frac{2}{\sin(2\theta)}$

donc $\mathscr{A}=\frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b- L'aire $\mathscr{A}=\frac{2}{\sin(2\theta)}$ est minimale si et seulement si

$\sin 2\theta$ est maximum or $0<2\theta<\pi$ donc $0<\sin 2\theta\le 1$

d'où $\mathscr{A}$ est minimale si et seulement si $2\theta=\frac{\pi}{2}$

par suite $\theta=\frac{\pi}{4}$ d'ou : $P(\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, 2\sqrt{2})$ et $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

ce qui prouve que M est le milieu du segment $[PQ]$.

EXERCICE N°5

De quoi s'agit-il ?

Equations différentielles -Recherche d'un ensemble de fonctions.

SOLUTION

1) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y''+y=0$ est l'ensemble des fonctions

définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=A\sin x+B\cos x$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$

2) a- $g(x)=\cos x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=-\sin x$

donc $g'(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\sin x+\sin x=0$ ainsi $g'(x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

par suite g est un élément de E.

b- Comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

et par suite $f''(x)-f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$ d'où $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

c- Si f est un élément de E alors pour tout réel x on a : $f'(x)=-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

ce qui donne : pour tout réel x , $f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-f(x)$.

Or d'après b- si f est un élément de E alors pour tout réel x , $f''(x)=f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Par suite : pour tout réel x , $f''(x)=-f(x)$ d'où $f''(x)+f(x)=0$

C'est-à-dire f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$.

d- d'après c- si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle

$y''+y=0$ donc $f(x)=A\sin x+B\cos x$ où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

D'autre part, comme f est un élément de E donc pour tout réel x on a : $f'(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=0$

Ce qui donne, pour tout réel x, $(A\cos x-B\sin x)+\left(A\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+B\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=0$

donc pour tout réel x, $A\cos x - B\sin x + A\cos x + B\sin x = 2A\cos x = 0$ ainsi $A = 0$

d'où $f(x) = B\cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = B\cos x$ où $B \in \mathbb{R}$.

FIN.