REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION PRINCIPALE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION : MATHEMATIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DURÉE : 4 Heures	COEFFICIENT : 4

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse vaut 0 point.

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $1+i\sqrt{3}$.

L'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est le point d'affixe

a) $-\sqrt{3}+i$ b) $\sqrt{3}-i$ c) $-\sqrt{3}-i$

2) Si z est un nombre complexe non nul d'argument $\frac{\pi}{6}$ alors un argument de $i\bar{z}$ est

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$,

alors $a_n \equiv 0 \pmod 5$ pour

a) tout entier naturel n pair b) tout entier naturel n c) tout entier naturel n impair

4) Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte quatre questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard à chacune des quatre questions de ce QCM.

La probabilité pour que ses quatre réponses soient toutes exactes est

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3^4}$ c) $1-\left(\frac{2}{3}\right)^4$

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,,\,1[$ par $f(x) = \ln(1-\sqrt{x})$.

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

b) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1
f'(x)		−	
f(x)	0	↘	$-\infty$

Tracer $(\mathscr{C})$. (On précisera la demi-tangente à $(\mathscr{C})$ en O).

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,\,1[$ sur $]-\infty,\,0]$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

b) Tracer (Γ). (On précisera la demi-tangente à (Γ) en O).

3) a) Montrer que, pour tout $x \in\,]-\infty,\,0]$, $f^{-1}(x) = \left(e^x - 1\right)^2$.

b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = -\ln 2$; $x = 0$ et $y = 0$.

c) En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1-\sqrt{x})dx$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC] , [AC] et [JC] .

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que f(K) = L .

c) Soit H le milieu du segment [A J]. Justifier que f(I) = H .

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H .

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ s_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2° et $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ .

a) Tracer Δ .

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q .

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ et on désigne par M le point de coordonnées $(\cos\theta , 2\sin\theta)$, où θ est un réel de $\left]0 , \frac{\pi}{2}\right[$.

1) a) Déterminer, par leurs coordonnées, les sommets et les foyers de $(\mathcal{E})$.

b) Tracer $(\mathcal{E})$ et placer ses foyers.

c) Vérifier que le point M appartient à $(\mathcal{E})$.

2) Soit (T) la tangente à $(\mathcal{E})$ en M.

Montrer qu'une équation de (T) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est $2x\cos\theta + y\sin\theta - 2 = 0$.

3) On désigne respectivement par P et Q les points d'intersection de (T) avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées et on désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du triangle OPQ.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{2}{\sin(2\theta)}$.

b) En déduire que l'aire $\mathcal{A}$ est minimale si et seulement si M est le milieu du segment [PQ].

Exercice 5 (3 points)

1) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

2) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$.
Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E . Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

d) Déterminer alors l'ensemble E.