

**EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011**

**SESSION
PRINCIPALE**

**SECTION : MATHEMATIQUES
EPREUVE : MATHEMATIQUES**

DUREE : 4 heures

COEFFICIENT : 4

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Dans ce qui suit, x et y désignent des entiers.

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- $x^3 \equiv x \pmod{2}$.
- Si $x \equiv 2 \pmod{14}$ alors $x \equiv 1 \pmod{7}$.
- Si $4x \equiv 10y \pmod{5}$ alors $x \equiv 0 \pmod{5}$.
- Si $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{5} \\ y \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ alors $8x - 5y = 7$.

Exercice 2 (6 points)

I - Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

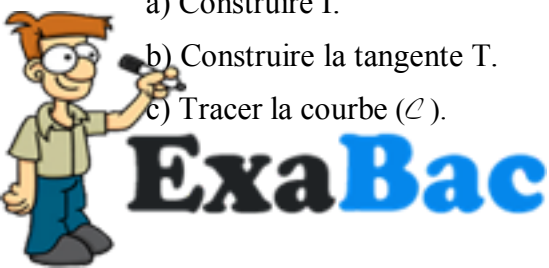
- Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0.
- Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.
 - En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
 - Dresser le tableau de variation de f .
- Montrer que le point $I \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2} \right)$ est un point d'inflexion de la courbe (\mathcal{C}) .
 - Donner une équation de la tangente T à la courbe (\mathcal{C}) au point I .
- Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - Construire I .
 - Construire la tangente T .
 - Tracer la courbe (\mathcal{C}) .



4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe (\mathcal{C}), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = k$ et $x = k + 1$ où k est un entier naturel non nul.

a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

b) Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$.

a) Interpréter graphiquement S_n .

b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{n+1} \right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

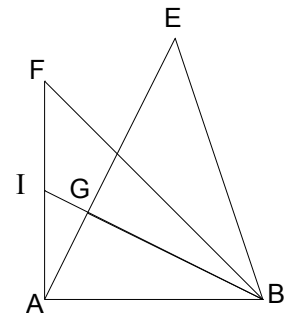
c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABF est un triangle rectangle isocèle tel

que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$,

I est le milieu de $[AF]$. Les droites (IB) et (AE) se coupent en G et EGB est un triangle rectangle isocèle en G .



1) Soit f la similitude directe de centre B , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de

rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer les images des points E et F par f .

2) Soit g la similitude directe qui envoie A en F et F en B .

a) Montrer que g est de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

b) Déterminer la nature de $g \circ g$ et préciser son rapport et son angle.

c) Montrer que $\tan(\widehat{ABI}) = \frac{1}{2}$. En déduire que $GB = 2 GA$.

d) En déduire que G est le centre de g .

3) Soit $r = g \circ f$.

a) Montrer que r est la rotation de centre F et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer $r(E)$. En déduire que $EFGH$ est un carré, où H est le milieu de $[EB]$.



EXERCICE 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que :

(le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si $(\frac{1+z}{z})$ est imaginaire pur.

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que $\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$.

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe (O, \vec{u}) .

On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$ puis que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) \equiv (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

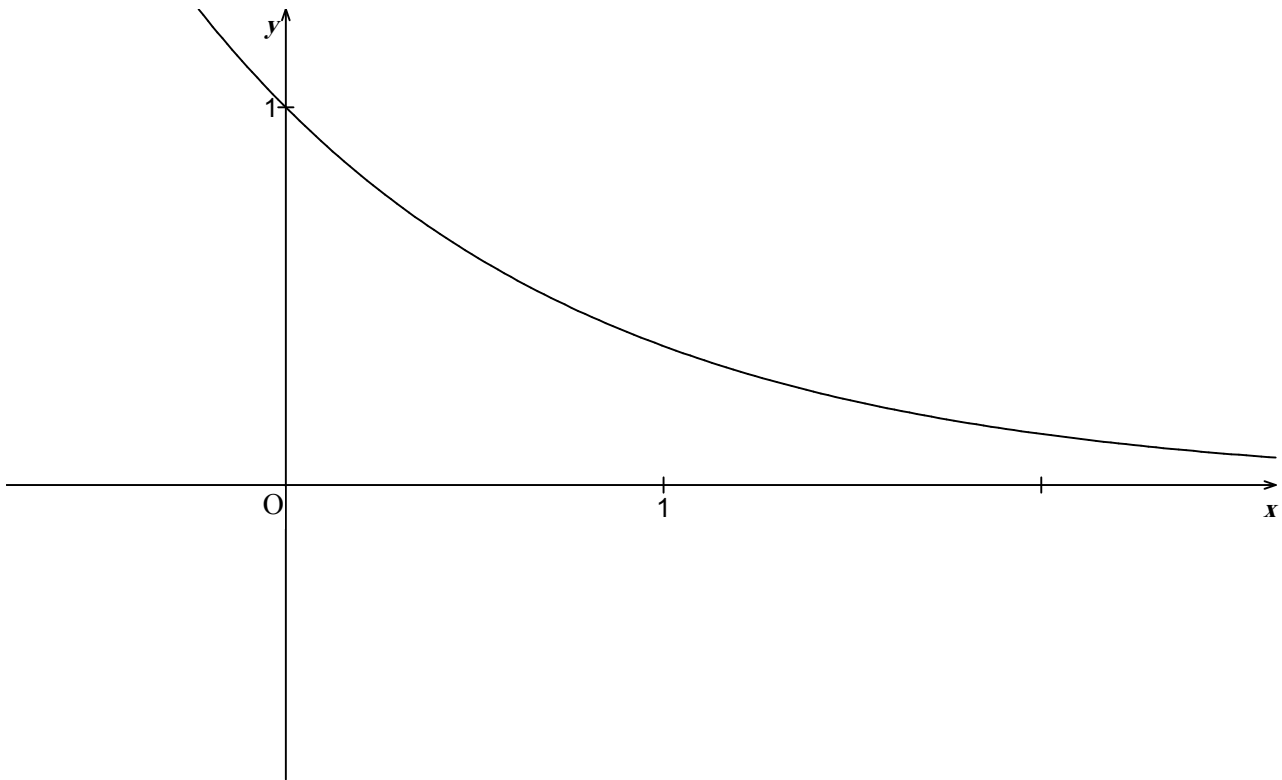
b) Montrer que $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.



ANNEXE

EXERCICE 2 figure1



EXERCICE 4 : figure 2

