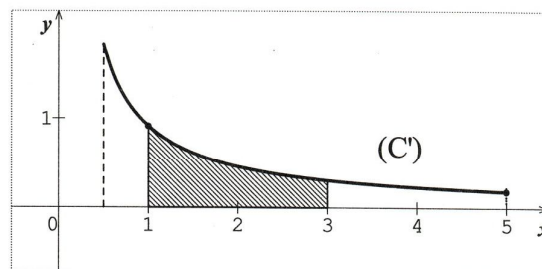


Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[\frac{1}{2}, 5]$ telle que sa courbe représentative (C) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3, 1)$. Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C') de la dérivée f' de la fonction f .



Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1) (C) admet une tangente de coefficient directeur -1.
- 2) L'aire de la partie hachurée est égale à 1.
- 3) (C) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$.
- 4) Pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$.

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que

$$(\widehat{BA, BJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ et } (\widehat{CI, CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi].$$

On désigne par t la translation de vecteur \overrightarrow{IA} et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C .

- 1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

- 2) Soit $K = t(C)$.

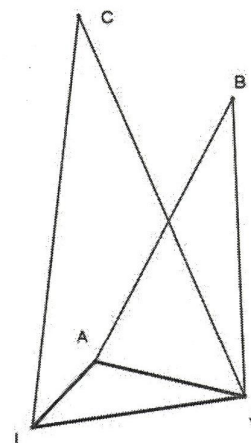
$$\text{Montrer que } BC = BK \text{ et } (\widehat{BC, BK}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi].$$

- 3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{DI, DA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- a) Soit O le milieu de $[AC]$.

Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC .

- b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.



Exercice 3 (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On désigne par A le point de coordonnées $(3, 2)$.

Soit N un point de l'axe (O, \vec{u}) et P le point de l'axe (O, \vec{v}) tel que ANP est un triangle rectangle en A.

1) a) Soit les points $E(3, 0)$ et $F(0, 2)$.

Montrer qu'il existe une unique similitude directe S de centre A qui transforme E en F.
Donner son rapport et son angle.

b) Déterminer l'image de l'axe (O, \vec{u}) par S.

c) En déduire que $S(N) = P$.

d) Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' tel que $M' = S(M)$.

Montrer que $z' = -\frac{3}{2}i z + \frac{13}{2}i$.

2) a) On note x l'abscisse du point N et y l'ordonnée du point P.

Montrer que $3x + 2y = 13$.

b) Déterminer les points N et P dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 4 (3 points)

Un laboratoire de sciences physiques dispose d'un ensemble d'oscilloscopes de même modèle. La durée de vie, en nombre d'années, d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,125.

Dans tout l'exercice on donnera les résultats à 10^{-3} près par défaut.

1) a) Montrer que $p(X > 10) = 0,286$.

b) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

2) Le responsable du laboratoire veut commander n oscilloscopes ($n \geq 2$).

On suppose que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres.

On note p_1 la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

a) Exprimer p_1 en fonction de n .

b) Combien d'oscilloscopes, au minimum, devrait commander le responsable pour que p_1 soit supérieure à 0.999 ?



Exercice 5 (6 points)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0, +\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2 .

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe (L) de la fonction \ln et la courbe (C) d'équation $y = x^2$.

a) Soit $x > 0$. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives

$$2, \frac{1}{e} \text{ et } \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k .

b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1 + \ln k}{k}$.

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x, x^k)$ et $M(x, \ln x)$.

Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k .

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k) .

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.

Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



Annexe (à rendre avec la copie)

