MINISTERE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT	Coefficient: 4 Durée: 4heures
Mr : Bouhouch Ameur	4ème Math	Session de contrôle 2015

Exercice n°1:

1) a) *Le rapport de f est $k=\dfrac{OB}{AI}=\dfrac{OB}{AJ}=\dfrac{OB}{\left(\frac{1}{2}AB\right)}=2\dfrac{OB}{AB}=2\cos\left(A\hat{B}O\right)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

*L'angle de f est $\theta\equiv\left(\overrightarrow{AI},\widehat{\overrightarrow{BO}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{AD},\widehat{\overrightarrow{BD}}\right)[2\pi]\equiv\left(\overrightarrow{DA},\widehat{\overrightarrow{DB}}\right)[2\pi]\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Comme I=A*D et f conserve le milieu alors f(I)=f(A)*f(D) $\Leftrightarrow$ O=B*f(D). or O=B*D, donc f(D)=D par suite **D est le centre de f.**

2) a) *Comme le triangle AEC est rectangle en E (puisque [AC] est un diamètre de $\mathcal{C}$ et E$\in\mathcal{C}$) alors (AE)$\perp$(EJ), d'autre part (AE) $\perp$(BH) par suite (BH)//(EJ) ; et puisque J=A*B alors **<u>E=A*H.</u>**

On a $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}.(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HB})=\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{EA}.\left(-\overrightarrow{EA}\right)+0=-EA^2$.

b) On a aussi $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=EA.EB.\cos\left(A\hat{E}B\right)$ avec $\left(\overrightarrow{EA},\widehat{\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DA},\widehat{\overrightarrow{DB}}\right)+\pi[2\pi]\equiv\dfrac{5\pi}{4}[2\pi]$

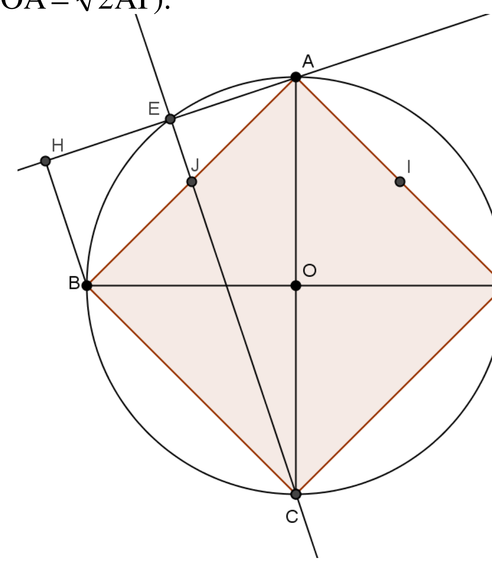
D'où $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}=EA.EB.\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$.

3) a) Le rapport de g est $k'=\dfrac{EA}{EB}=\dfrac{EA\times EA}{EB\times EA}=\dfrac{EA^2}{EA.EB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (car $-EA^2=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}EA.EB$).

b) Soit g(O)=O'.
comme le triangle OBE est isocèle en O alors son image par g (le triangle O'AE) est isocèle en O'.

c) On a O'A=O'E et $O'E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}AI=AI\ (OA=\sqrt{2}AI)$.

4) S est la composée d'une similitude directe f (de rapport $\sqrt{2}$) et d'une similitude indirecte g (de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)Alors S est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$ **donc S est un antidéplacement.**
Or S(A)=A alors S est une symétrie orthogonale, et comme S(I)=O' alors S=S_Δ **avec** $\Delta=$ med[IO']



Exercice n°2:

1) a) On a $M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y-4z+9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2-9+(z-2)^2-4+9=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2+(z-2)^2=4>0$. Donc S est une sphère de centre $I(0,3,2)$ et de rayon R=2.

b) On a, d'une part, $AB=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-3)^2+(2-2)^2}=\sqrt{16}=4=2R$.

D'autre part $\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0=x_I$; $\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{3+3}{2}=3=y_I$ et $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{2+2}{2}=2=z_I$ donc I=A*B

Par suite [AB] est un diamètre de S.

2) a) Comme $z_I=2$ alors $I\in P$ par suite P coupe S suivant un cercle Γ de centre I et de rayon r= 2.

Or $z_A=z_B=2$ alors donc A et B appartiennent à P, donc Γ est de diamètre [AB].

b) Γ' est un cercle inclus dans P et de rayon r'=4.

On a $JA=\sqrt{(-2+6)^2+(3-3)^2+(2-2)^2}=4$ donc $JA+IA=4+2=6=r+r'$ par suite Γ et Γ' **sont tangents Extérieurement en A.**

3) Soit $E(4,3,0)$ et soient h l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{5}{2}$ et S'=h(S).

a) * Le rayon de S' est $R'=\frac{5}{2}\times 2=5$.

* Posons I' (x,y,z), on a h(I)=I' $\Leftrightarrow \overrightarrow{EI'}=\frac{5}{2}\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'}-x_E=\frac{5}{2}(x_I-x_E) \\ y_{I'}-y_E=\frac{5}{2}(y_I-y_E) \\ z_{I'}-z_E=\frac{5}{2}(z_I-z_E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'}-4=\frac{5}{2}(0-4) \\ y_{I'}-3=\frac{5}{2}(3-3) \\ z_{I'}-0=\frac{5}{2}(2-0) \end{cases} \Leftrightarrow$ I' $(-6,3,5)$.

b) On a $d(I',P)=\frac{|5-2|}{1}=3<R'$ par suite P coupe S' suivant un cercle de rayon égal à

$\sqrt{R'^2-d^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4=r'$. Or $\overrightarrow{I'J}=(2-5)\vec{k}=-3\vec{k}=-3\vec{n}_P$ alors J est le projeté orthogonal de I' sur P. Finalement P coupe S' suivant le cercle Γ'.

c) Comme Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A, alors $A\in\Gamma'$ et donc $A\in S'$

Or $A\in S$ donc $h(A)\in S'\cap(EA)=\{A,A'\}$ par suite $h(A)=A'$.

On a aussi $I=A*B$ alors $h(I)=(A)*h(B)\Leftrightarrow I'=\overline{A'*h(B)}$.or $I'=A'*B'$ donc $h(B)=B'$ et alors **E,B et B' sont alignés.**

Exercice n°3:

1) a) On a $G(\overline{X},\overline{Y})$ avec $\overline{X}=\frac{1+2+3+.....+10}{10}=5.5$ et $\overline{Y}=\frac{0.38+0.46+.......+1.20}{10}\approx 0.82$.

b) On a $G_1(\overline{X}_1,\overline{Y}_1)$ avec $\overline{X}_1=\frac{1+2+3+4+5}{10}=1.5$ et $\overline{Y}_1=\frac{0.38+0.46+0.52+0.78+0.86}{10}=0.3$.

c) Voir figure.

d) (GG_1): $y=ax+b$ avec $a=\frac{y_{G_1}-y_G}{x_{G_1}-x_G}=\frac{0.3-0.82}{1.5-5.5}\approx 0.13$.

Comme $G_1\in(GG_1)$ alors $0.3=1.5a+b\Leftrightarrow b=0.3-1.5\times 0.13\approx 0.11$, d'où (GG_1): $y=0.13x+0.11$.

e) Une prévision des dépenses en 2019 est : $y_{2019}=0.13\times 16+0.11=2.19$

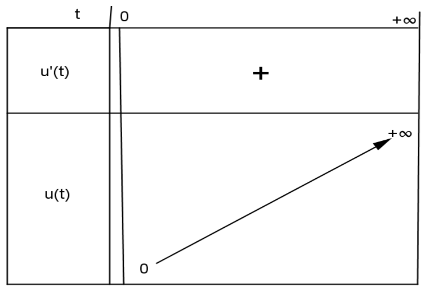
2) a) le coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Z) est $r=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{\sigma(X).\sigma(Z)}\approx\ldots.$

b) $D_{Z/X}: Z=aX+b$ avec $a=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Z)}{V(X)}\approx\ldots$ et $b=\overline{Z}-a\overline{X}\approx\ldots..$

c) On a $e^{Y_{2019}}=a\times16+b \Leftrightarrow Y_{2019}=\ln(16a+b)\approx\ldots$

Exercice n°4:

I) 1) $u(t)=3\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$, $t\in\,]0,+\infty[$.



a) on a $u'(t)=\dfrac{3}{1+t}-\left(\dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}\right)=\dfrac{3+3t}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}=\dfrac{2+3t}{(1+t)^2}>0$ pour tout $t>0$

D'où le tableau de variation de u :

b) d'après le tableau de variation de u on a $u(t)>0$ pour tout $t>0$.

2) on a $\begin{cases} f(x)=x^3[\ln(1+x)-\ln(x)] \text{ si } x\in\,]0,1] \\ f(0)=0 \end{cases}$.

a) * On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^3\ln(1+x)-x^2.x\ln(x))=0=f(0)\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

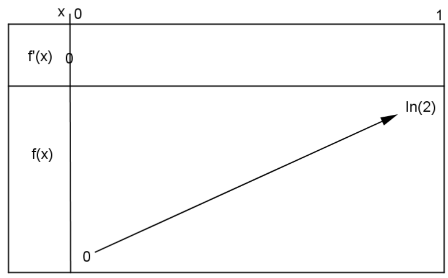
* On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2\ln(1+x)-x\;.x\ln(x))=0\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$.

b) On a pour tout $x\in\,]0,1]$:

$$f'(x)=3x^2[\ln(1+x)-\ln(x)]+x^3\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right]=3x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)+x^3\left[\frac{-1}{x(1+x)}\right]=x^2\left[3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=x^2u\left(\frac{1}{x}\right)$$

c) Pour tout $x\in\,]0,1]$ on a $f'(x)=x^2u\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$ (car $u(x)>0$).

d'où le tableau de variation de f :



II) 1) On a $\begin{cases} h(x)=x^3\ln(x) \text{ si } x\in\,]0,1] \\ h(0)=0 \end{cases}$

On a $h'(x)=3x^2\ln(x)+x^3.\dfrac{1}{x}=x^2(3\ln(x)+1)$ pour $x\in\,]0,1]$

D'où $h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^2\left(3\ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)+1\right)=\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)\left(3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1\right)=\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)(-1+1)=0\Rightarrow C_h$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) On a $f(x)=x^3[\ln(1+x)-\ln(x)]=x^3\ln(1+x)-x^3\ln(x)=g(x)-h(x)\ \forall x\in\,]0,1]$ et $f(0)=g(0)-h(0)$ donc $f(x)=g(x)-h(x)\ \ \forall x\in[0,1]$.

b) On a $\forall x\in[0,1]$ $f(x)=g(x)-h(x)\Leftrightarrow h(x)=g(x)-f(x)$, et comme $h(x)\geq0$ alors $g(x)-f(x)\geq0$, par suite C_g au dessus de C_f.

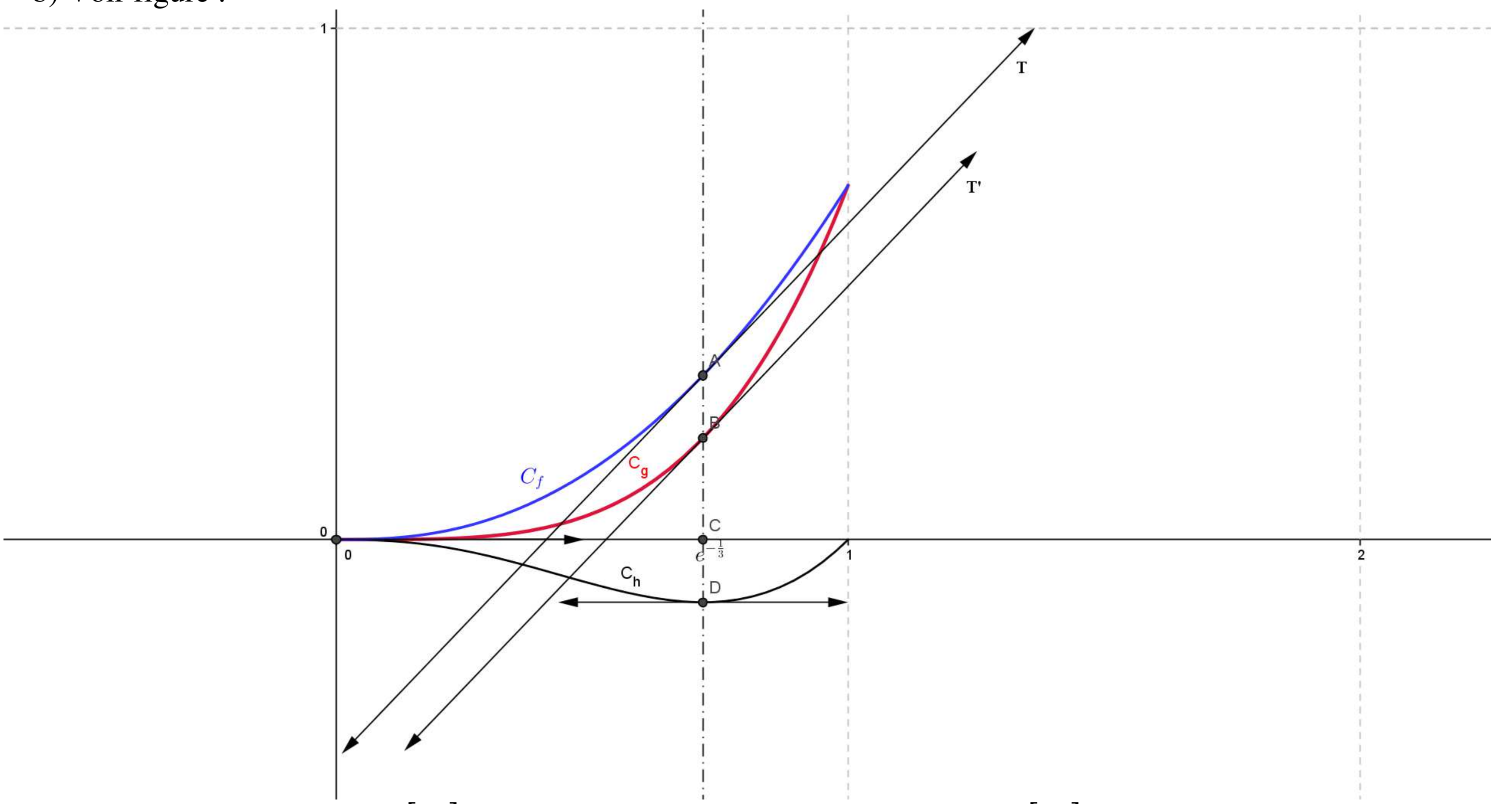
c) Comme $f(x)=g(x)-h(x)$ alors $f'(e^{-\frac{1}{3}})=g'(e^{-\frac{1}{3}})-h'(e^{-\frac{1}{3}})$ donc $f'(e^{-\frac{1}{3}})=g'(e^{-\frac{1}{3}})$ (car $h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)=0$),

par suite T et T' sont parallèles.

3) a) Pour construire le point A de C_f d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ il suffit de tracer la droite d'équation $x=e^{-\frac{1}{3}}$ et comme

$f(e^{-\frac{1}{3}}) = g(e^{-\frac{1}{3}}) - h(e^{-\frac{1}{3}})$ et $h(e^{-\frac{1}{3}}) < 0$ alors on a CA=CB+CD donc BA=CD,d'où la construction de A.

b) Voir figure :



4) a) Comme h est continue sur $[0,1]$ alors elle admet une unique primitive H sur $[0,1]$ qui s'annule en 1.

b) soit $\alpha \in \left]0,1\right]$, on a $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln(x)\mathrm{d}x = [\mathrm{H}(x)]_\alpha^1 = \mathrm{H}(1) - \mathrm{H}(\alpha) = 0 - \mathrm{H}(\alpha) = -\mathrm{H}(\alpha)$.

c) On a: $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln(x)\mathrm{d}x$. On pose $\mathrm{u}(x) = \ln(x) \to \mathrm{u}'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$v'(x) = x^3 \to v(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$\text{Donc } A_\alpha = \left[\frac{x^4}{4}\ln(x)\right]_\alpha^1 - \int_\alpha^1 \frac{x^3}{4}\mathrm{d}x = -\frac{\alpha^4}{4}\ln(\alpha) - \left[\frac{x^4}{16}\right]_\alpha^1 = -\frac{\alpha^4}{4}\ln(\alpha) - \frac{1}{16} + \frac{\alpha^4}{16}.$$

d) On a $\mathrm{H}(\alpha) = \dfrac{\alpha^4}{4}\ln(\alpha) + \dfrac{1}{16} - \dfrac{\alpha^4}{16}$ donc $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathrm{H}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{\alpha^3}{4}.\alpha\ln(\alpha) + \dfrac{1}{16} - \dfrac{\alpha^4}{16} = \dfrac{1}{16}$ et par suite $\mathrm{H}(0) = \dfrac{1}{16}$ (Car H est continue en 0).

e) L'aire de la partie du plan limitée par C_g, C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\mathrm{H}(0) = \dfrac{1}{16}$ (u.a).