www.devoir.tn www.matheleve.tn	*CALCUL INTEGRAL*	
	Cours	*4 ème Informatique*

I°/ Définition :

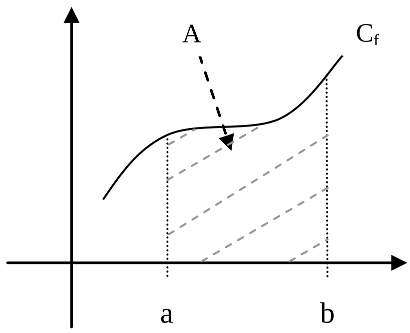
On a démontré qu'une fonction f continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives (c'est-à-dire des fonctions admettant pour dérivé f sur I.)

Si l'une des primitives est F, toutes les primitives de f sur I s'écrivent G telles que G(x) = F(x) + k où k est une constante quelconque.

Le nombre G(b) – G(a) = F(b) – F(a) (où a et b sont deux éléments de I tels que a < b) est donc indépendant de k , ce note $[F(t)]_a^b$ ou encore $\int_a^b f(t)\,dt$ et s'appelle l'intégrale, de a à b, de la fonction continue f (t est la variable sur [a ; b].)

II°/ Interprétation géométrique d'une intégrale :

Le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire algébrique de la courbe C_f située dans le domaine délimité par les deux droites d'équations x = a , x = b , C_f sur [a ; b] et l'axe des abscisses.



III°/ Propriétés immédiates :

1°/ Relation de Chasles :

Soit c dans [a ; b] et f une fonction continue sur [a ; b] alors

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$$

$$A = A_1 + A_2$$

2°/ Nullité d'une intégrale :

$$\boxed{\int_a^a f(t)\,dt = 0}$$

Conséquence :

$$\int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt = 0$$

donc $$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$$

3°/ Linéarité :

Soient f et g deux fonctions continues sur [a ; b] et λ et μ deux réels quelconques alors :

$$\boxed{\int_a^b \lambda.f(t) + \mu.g(t)\,dt = \lambda.\int_a^b f(t)\,dt + \mu.\int_a^b g(t)\,dt}$$

Démonstration :

4°/ Inégalité :

Pour toutes fonctions f et g continues sur [a ; b] :

- si $f \geq 0$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
- si $f \leq 0$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t)\,dt \leq 0$
- si $f \geq g$ sur [a ; b] alors $\int_a^b f(t)\,dt \geq \int_a^b g(t)\,dt$

5°/ Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur [a ; b]
Soients m et M deux réels tels que :

$$\forall\, t \in [a\,;b] \text{ si } m \leq f(t) \leq M \text{ alors } m.(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M.(b-a)$$

Ou encore : $$\boxed{m \leq \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,dt \leq M}$$

Vocabulaire :

La valeur $\frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,dt$ s’appelle la valeur moyenne de f sur [a ; b]

Démonstration :

IV°/ Intégration par parties :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions admettant des dérivées continues sur [a ; b] (f et g sont dites de classe C^1).
Et f ’ et g’ les dérivées respectives de f et g sur [a ; b] .

$$\int_a^b f(t).g'(t)\,dt = \big[f(t).g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t).g(t)\,dt$$

V°/ Exercices :

Calculs d’intégrales simples :

- $I = x^3 + 3.x^2 - 1\,dx$
- $I = \int_0^{\pi} \cos x\,dx$
- $I = \int_1^2 \left(t + \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt$
- $I = \int_{-1}^{\ln 2} 1 - 5.e^x\,dx$

Intégration par parties :

- $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} x.e^x\,dx$
- $I = \int_{-1}^{0} (-2.x + 1).\,e^x\,dx$
- $I = \int_e^{2e} x\,.\ln x^3\,dx$
- $I = \int_0^1 x^2.\,e^x\,dx$
- $I = \int_5^{10} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$
- $I = \int_{-1}^{0} (x+1)^2.\,e^{-x}\,dx$