



## I) Composée de deux fonctions

Soit  $C_f$  la représentation graphique d'une fonction  $f$  dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

### 1) Définition

Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D$  et  $g$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $f(D)$ . On appelle fonction composée de  $f$  et  $g$ , la fonction

notée  $g \circ f$  et définie pour tout  $x \in D$ , par :  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

### 2) Théorème

Si  $f$  et  $g$  ont **même sens** de variation, alors  $g \circ f$  est **croissante** sur  $I$ .

Si  $f$  et  $g$  ont des sens de variations **contraires**, alors  $g \circ f$  est **décroissante** sur  $I$ .

## II) Fonctions associées

$g(x) = f(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$	$C_g = t_{k\vec{j}}(C_f)$
$h(x) = f(x + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$	$C_h = t_{-\lambda\vec{i}}(C_f)$
$k(x) = -f(x)$	$C_k = S_{(x\ x')}(C_f)$
$l(x) = f(-x)$	$C_l = S_{(y\ y')}(C_f)$

## III) Limites

### 1) Limite finie en $a$ ( $a$ réel)

#### Remarque

Si une fonction admet une limite en  $a$ , cette limite est unique

$$\left( \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \right) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \right)$$

#### Théorème

\*  $f$  est définie en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

\* Si, pour  $x \neq a$ ,  $f(x) = g(x)$  où  $g$  est une fonction définie en  $a$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . alors  $f$  admet une limite en  $a$ , et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ .

## 2) Limite en $+\infty$ ou $-\infty$

### *Théorème*

A l'infini, une fonction polynôme a même limite que son terme du plus haut degré.

A l'infini, une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié de ses termes du plus haut degré.

## 3) Opérations sur les limites

### *Somme*

$a$  ( $a$  réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ ).

$\lim_{x \rightarrow a} f$ \ $\lim_{x \rightarrow a} g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$
$l$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Les situations marquées ? sont appelées **formes indéterminées**

### *Produit*

$\lim_{x \rightarrow a} f$ \ $\lim_{x \rightarrow a} g$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \neq 0$	$ll'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

### *Fonction composée*

$a, b, l$  sont chacun un réel ou l'un des symboles  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l$

## IV) Asymptotes

### 1) Asymptote verticale

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne  $a$  et  $C$  sa courbe représentative.

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote

verticale pour la courbe  $C$

\*Pour avoir une asymptote verticale, la valeur interdite ne suffit pas : il faut aussi que, en cette valeur, la limite à droite ou à gauche soit infinie.

### **2) Asymptote horizontale**

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de borne  $+\infty$  ou  $-\infty$  et  $C$  sa courbe représentative.

Si la limite de  $f(x)$  est un nombre  $L$ , quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , (ou  $-\infty$ ), alors la droite d'équation  $y = L$  est une asymptote horizontale pour  $C$  en  $+\infty$  ( ou  $-\infty$  )

### **3) Asymptote oblique**

\*Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de borne  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,  $C$  sa courbe représentative et  $D$  une droite d'équation  $y = ax + b$  dans un repère

-Si la limite de la différence  $f(x) - (ax + b)$  est nulle quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ) alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique pour  $C$  en  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

-Pour étudier la position relative de  $C$  et de  $D$ , on étudie le signe de  $d(x)$ .