

Les Fonctions logarithmes

La fonction logarithme népérien

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Donc :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

\ln est une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} .

$$e^{\ln x} = x \text{ avec } x > 0$$

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$$

$$\ln(e^x) = x$$

Les propriétés de la fonction \ln

Pour tout x, y de \mathbb{R}_+^*

$$\bullet \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad , \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln(x) \quad , \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad , \quad \ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x)$$

$$\bullet \text{ Pour tout } p \text{ de } \mathbb{Z} \text{ , } \ln(x^p) = p \cdot \ln(x)$$

Dérivabilité et continuité de la fonction \ln

\ln est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

$$\text{pour tout } x > 0, \text{ que } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Approximation affine au voisinage de 1

$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Remarque, une équation de la tangente à la courbe C_{\ln} est : $y = x - 1$

Limites

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0^-$$

Étude du sens de variation de \ln et étude de la fonction $\ln \circ u$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$ donc \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Donc :

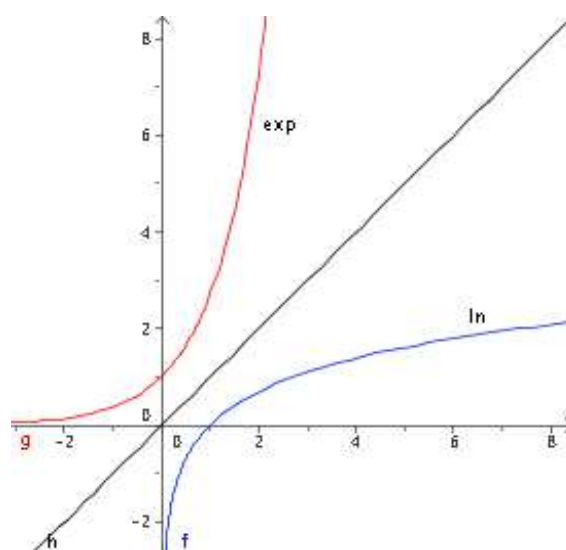
$$a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$$

$$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1, \quad \ln a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Soit I un intervalle de \mathbb{R}

Si u est dérivable et strictement positive sur I alors $f = \ln \circ u$ est définie et dérivable sur I et

$$\text{on a } \forall x \in I, f'(x) = u'(x) \cdot \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$



C_{\ln} est le symétrique de C_{\exp} par la droite d'équation $y=x$

Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal, notée \log , est définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
On a donc $\log(1)=0$ et $\log(10)=1$.

Toutes les propriétés algébriques de la fonction \ln sont vérifiées par la fonction \log .
En particulier, on a $\log(10^n)=n$.