| | | |
|---|---|---|
| *Mathématiques aux élèves*<br>*Site web :* http://www.matheleve.com/<br>*Email :contact @matheleve.com* | ***Probabilités sur un ensemble fini*** | |
| | *Cours* | *4 ème Informatique* |

# I) Probabilité sur un ensemble fini

## 1) Vocabulaire des événements

Dans une expérience aléatoire, l'univers $\Omega$ est l'ensemble de tous les résultats possibles.

*Un événement est une partie de l'univers.

*Un événement élémentaire est un événement possédant un seul élément.

*Deux événements A, B, sont disjoints ou incompatibles si et seulement si $A \cap B = 0$.

*L'événement contraire d'un événement A est l'événement $\bar{A}$ constitué des éléments de $\Omega$ n'appartenant pas à A.

## 2) Calcul des probabilités

*La probabilité d'un événement d'un univers fini $\Omega$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

*La probabilité de $\Omega$ est 1 $(P(\Omega) = 1)$

*La probabilité de $\emptyset$ est 0 $(P(\emptyset) = 0)$

*Pour tout événement A : $0 \leq P(A) \leq 1$.

### Propriétés

*Pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$

*Pour tous événements A et Bon a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

*Pour tous événements **disjoints** ou **incompatibles** A, B on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

*Pour tous événements deux a deux **disjoints** ou **incompatibles** $A_1, A_2 \ldots A_n$ on a

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

*Pour tout événement A, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ( $\bar{A}$: Événement contraire de A)

# II) Equiprobabilité

## 1) Définition

Il y a équiprobabilité (ou probabilité uniforme) si et seulement tous les événements ont la même probabilité.

la probabilité d'un événement élémentaire $\{a\}$; $p(a) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$

### 2) Probabilité d'un événement A

Pour tout événement A (relativement bien sur à l'univers Ω, la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

**Remarque**

Dans le cas de l'équiprobabilité la détermination d'une probabilité se ramène en générale à des problèmes de dénombrements (voir cour 3ème)

**Exemple** :

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse à la probabilité de l'évènement :

A : " le numéro de la face supérieure est multiple de 2 "

A = {2 ;4 ; 6}

card A = 3

card Ω= 6

P(A)=3/6=1/2

et, pour tout événement A,

$$\text{p(A)} = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## III) Probabilité conditionnelle

### 1) Définition

Soient p une probabilité sur Ω et A et B deux événements tels que p(A) $\neq 0$,

l'application qui à tout événement B associe le nombre réel $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

est une probabilité surΩ. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A on la note p(B/A)

### 2)probabilités composées

On en déduit la formule dite des probabilités composées : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$.

### 3) Événements indépendants

Deux événements A et B sont dits indépendants si et seulement si la réalisation de A n'apporte aucune information sur la réalisation de B et on a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

**Remarque**

Ne pas confondre indépendant et incompatible

## Propriété

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si on a : p (B/A) = p(B) ou p (A/B)=p(A)

## 4) Arbre de probabilité et formule des probabilités totales :

c'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

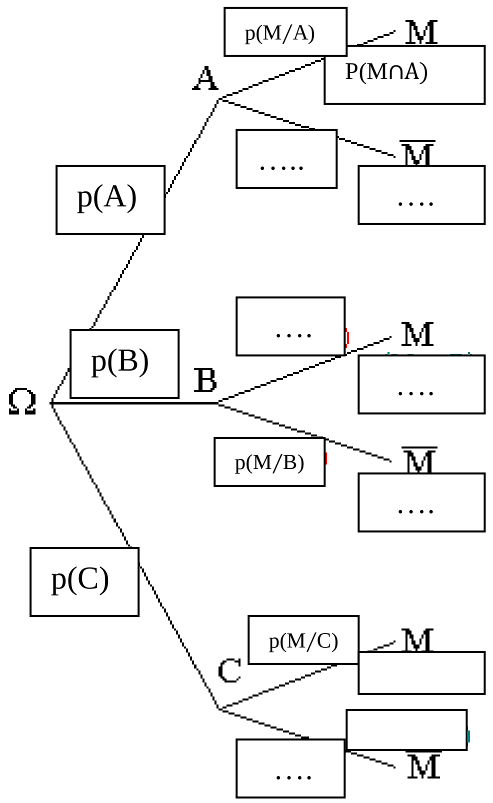
## Remarque

Arbre probabiliste ≠Arbre à dénombrer

## Exemple

Soit p une probabilité p sur un universΩ et A, Be t C trois évènements incompatibles et leur réunion est Ω

Soit un événement M compléter l'arbre probabiliste suivant :




La formule qui permet de calculer p(M) s'appelle formule des probabilités totales :

p(M)=p(M∩A) +p(M∩B) p(M∩C)

p(M)= p(M/A) ×p(A) +p(M/B) ×p(B) + p(M/C) ×p(C)

## 5) Définition

Soit E un ensemble finie on dit que les parties $M_1$ ,$M_2$,.. et $M_n$ forment une partition de E

Si $M_i \neq \emptyset$ , $(i \in \{1,2,..n\})$ et $M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n = E$

## 6) Formule des probabilités totales

Soit $(E, \mathcal{P}(E) ; p)$ un espace probabilisé et A un événement

Alors pour toute partition $M_1$ ,$M_2$,.. et $M_n$ des éléments non vide de E on a :

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap M_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A / M_i)\, p(M_i)$$

## 7) Formule de bayes

Soit E un ensemble finie et $M_1$ ,$M_2$,.. et $M_n$ forment une partition de E

A un événement de probabilité non nulle

$$p(M_i/A) = \frac{p(A/M_i).p(M_i)}{\sum_{j=1}^{n} p(A/M_j).p(M_j)}$$