I- Séries Statistiques Doubles :

◆ **Exemple** : Le tableau suivant donne le poids en Kg et la taille en cm d'un groupe de 10 enfants :

P_i	25	27	23	30	27	23	25	30	32	28
T_i	90	92	85	99	93	88	92	98	99	90

▸ Le couple $(P_1, T_1) = (25, 90)$ veut dire que l'enfant N°1 pèse 25 Kg et mesure 90 cm.

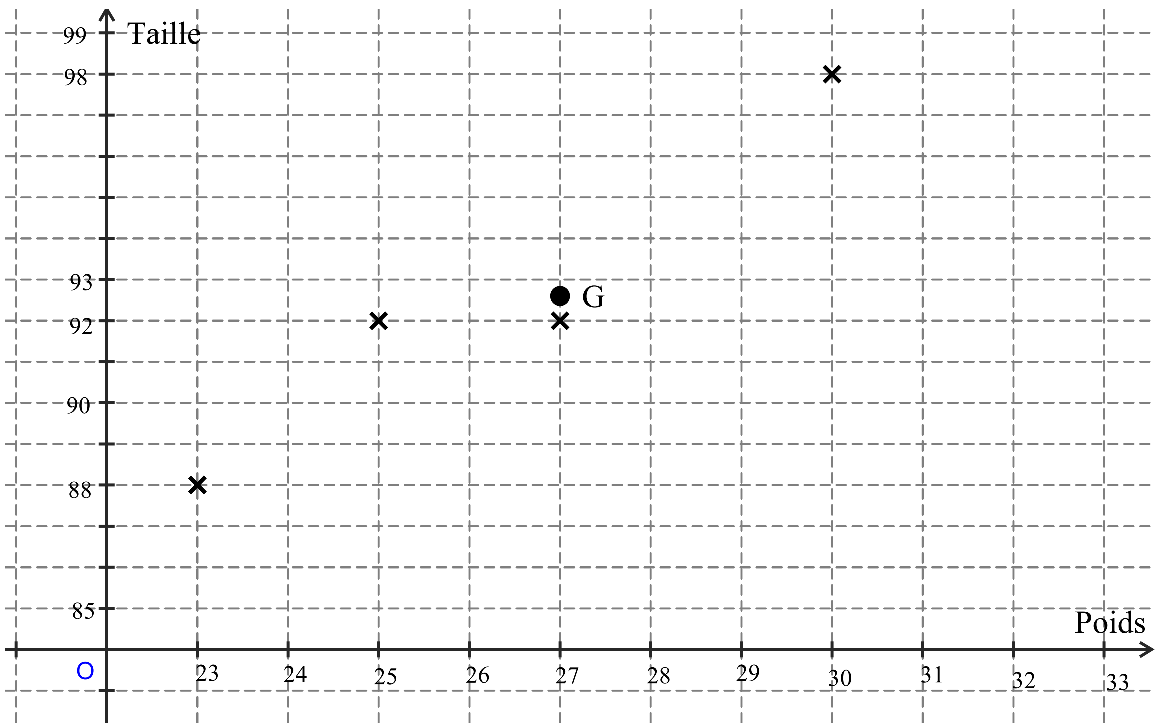
▸ On a donc une population de 10 enfants sur laquelle on a observé simultanément les deux variables P et T.

◆ **Définition** : On dit qu'un couple (X,Y) de variables statistiques définies une série double si les deux variables X et Y sont observés simultanément sur une même population.

▸ La moyenne arithmétique des poids est : $\overline{P} =$ ....

▸ La moyenne arithmétique des Tailles est : $\overline{T} =$ ....

▸ Placer dans un repère orthogonal l'ensemble des points $M_i(P_i, T_i)$:



◆ **Définition** : Soit une série statistique définie par deux variables X et Y . On désigne par $x_1, x_2, ..., x_n$ les valeurs de X et par $y_1, y_2, ..., y_n$ celles de Y. Le plan étant rapporté à un repère orthogonal.

L'ensemble des points $M_i(x_i, y_i)$; $i \in \{1, 2, ..., n\}$ est appelé Nuage De Points.

Le point $G(\overline{x}, \overline{y})$ est appelé point moyen du nuage.

◆ **Distributions marginales** :

Soit le tableau statistique suivant : X : note en mathématiques ; Y : nombre de frères et sœurs. $N = 100$

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	Totaux
[0,4[	1	0	1	1	0	1	1	
[4,8[	2	2	4	3	3	4	2	20
[8,12[	5	5	10	7	6	4	3	
[12,16[	2	3	5	5	4	4	2	25
[16,20[	1	1	2	3	2	1	0	
Totaux	11		22		15		8	100

‣ Les totaux inscrits en marge de chaque tableau à double entrée définissent deux distributions marginales, l'une associée à la première variable statistique et l'autre associée à la deuxième variable statistique.

X : Note en Maths	[0,4[	[4,8[	[8,12[	[12,16[	[16,20[	Total
$\sum_{j=1}^{7} n_{ij}$		20		25	10	100

Distribution marginale de X

Y : nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif $n_{\bullet j}$	11		22		15		8	100

Distribution marginale de Y

• Calcul de **la moyenne ($\overline{X}$) ; la variance $(V(X))$ et l'écart-type $(\sigma(X))$**

‣ $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} x_i n_i}{N} = \dfrac{(2\times5)+(6\times20)+(10\times40)+(14\times25)+(18\times10)}{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

‣ $V(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{X}^2 = \dfrac{(2^2\times5)+(6^2\times20)+(10^2\times40)+(14^2\times25)+(18^2\times10)}{100} - \overline{X}^2 = \ldots\ldots$

‣ $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

‣ $\overline{Y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} y_i n_i}{N} = \dfrac{(0\times11)+(1\times11)+(2\times22)+(3\times19)+(4\times15)+(5\times14)+(6\times8)}{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

‣ $V(Y) = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} y_i^2 \cdot n_i}{N} - \overline{Y}^2 = \dfrac{(0^2\times11)+(1^2\times11)+(2^2\times22)+\ldots\ldots\ldots+(6^2\times8)}{100} - \overline{Y}^2 = \ldots\ldots$

‣ $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$

II- Ajustement affine d'une série statistique double :

Lorsque le nuage des points, représentant graphiquement une série statistique à deux caractères X et Y, a une forme allongée, on peut approcher la relation entre les deux variables X et Y par une relation affine définie par : $Y = aX + b$ ou $X = a'Y + b'$.

On appelle ajustement affine toute méthode permettant la détermination d'une telle relation.

1) Méthode de Mayer :

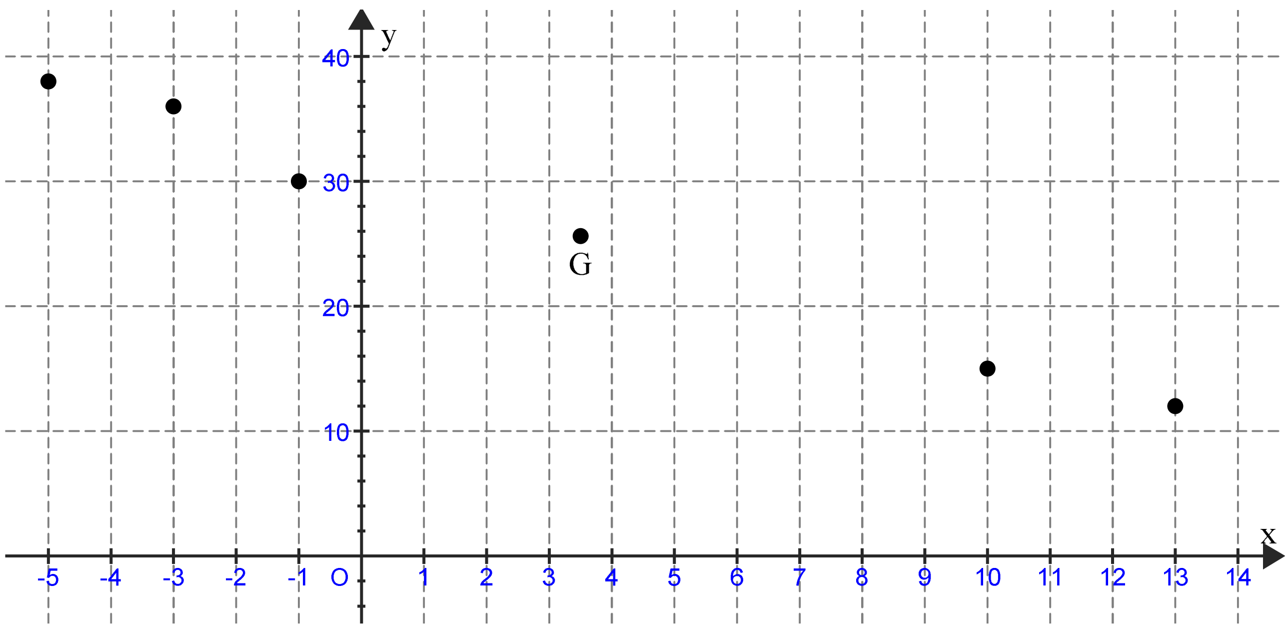
La méthode de Mayer consiste à :

- Partager le nuage de points en deux parties P_1 et P_2 situées de part et d'autre par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées et contenant à peu prés le même nombre de points.
- Déterminer les points moyens respectifs G_1 et G_2 des parties P_1 et P_2.
- La droite (G_1G_2) est alors la droite d'ajustement affine du nuage de points représentant la série.
- La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global.

◆ **Exemple** :

Le tableau ci-dessous présente la consommation de fuel d'une habitation en fonction de la température.

Température x_i en °C	-5	-3	-1	2	5	7	10	13
Consommation y_i de fuel /24h en L	38	36	30	29	25	20	15	12



1) Compléter le nuage de points $M(x_i, y_i)$ dans le repère ci-dessus.

2) Fractionner le nuage de points en deux parties égales.

3) Calculer les coordonnées du point moyen G_1 de la première partie du nuage.

$G_1\left(\dfrac{-5-3-1+2}{4} \;;\; \dfrac{38+36+30+29}{4}\right)$ alors $G_1(\ldots\ldots\ldots\ldots \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots)$

4) Calculer les coordonnées du point moyen G_2 de la deuxième partie du nuage.

$G_2(\ldots\ldots\ldots\ldots \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots)$

5) Tracer la droite (G_1G_2).

6) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage. $G(\ldots\ldots\ldots\ldots \;;\; \ldots\ldots\ldots\ldots)$

7) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2). $(y = ax + b)$.

$a = \dfrac{y_{G_1} - y_{G_2}}{x_{G_1} - x_{G_2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx -1,45$

$b = y_{G_1} - a \cdot x_{G_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \approx 30,71$ donc $(G_1G_2): y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

8) A partir de l'équation de la droite, donner une estimation de la consommation de fuel pour une température de –10°C.

9) Déterminer graphiquement, à l'aide de la droite d'ajustement, la température pour une consommation de 22L.

10) Retrouver le résultat précédent par le calcul à partir de l'équation de (G_1G_2).

2) Méthode des Moindres carrés :

On peut reconnaître la relation affine éventuelle entre les deux variables X et Y à l'aide d'un moyen non graphique et en faisant intervenir deux paramètres statistiques à savoir : la covariance $Cov(X,Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire r.

◆ **Covariance** : Soit une série statistique (X,Y) double définie par $\{x_1, \ldots\ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots\ldots, y_n\}$ observée sur une population de n individus. On appelle covariance du couple (X,Y) le réel :

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y}$$

◆ **Exemple** : Soit la série statistique double définie par le tableau suivant, Compléter le tableau :

x_i	2	5	3	1	1	4	2	3	$\sum x_i = \ldots\ldots$	$\overline{X} = \ldots\ldots$
y_i	25	40	10	5	0	15	50	12	$\sum y_i = \ldots\ldots$	$\overline{Y} = \ldots\ldots$
$x_i y_i$	50		30		0		100		$\sum x_i y_i = \ldots\ldots$	$\overline{XY} = \ldots\ldots$

$Cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

◆ **Exercice** : Calculer la covariance de la série statistique double (X, Y) définie par :

x_i	1	2	2	2	5
y_i	7	8	9	5	8

$\overline{X} =$ ……………………………………

$\overline{Y} =$ ……………………………………

$\overline{XY} =$ ……………………………………

$\text{Cov}(X, Y) = \overline{XY} - \overline{X}\ \overline{Y} =$ ……………………………………

◆ **Coefficient de corrélation linéaire** :

On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel r défini par : $r = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$; $r \in [-1,1]$

◆ **Exercice** :

Calculer le coefficient de corrélation linéaire r pour la série statistique suivante :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	200	205	211	216	220	225	240	260	280	300

- $\overline{X} =$ …………………………… • $\overline{Y} =$ ……………………………
- $\overline{XY} =$ ……………………………
- $V(X) =$ ……………………………
- $V(Y) =$ ……………………………
- $\text{Cov}(X, Y) =$ …………………… • $\sigma(X) =$ …………………… • $\sigma(Y) =$ ……………………
- $r =$ ……………………………

◆ **Théorème** :

X et Y deux variables statistiques observées sur une population d'effectif N.

- Si $0,75 \le |r| \le 1$ alors il y a une relation linéaire entre X et Y ; $(Y = a\,X + b \quad ; \quad X = a'Y + b')$

  représentées graphiquement par deux droites passant par $G(\overline{X}\ ,\overline{Y})$.

- $Y = a\,X + b$: Droite de régression de Y en X avec $a = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

- $X = a'Y + b'$:Droite de régression de X en Y avec $a' = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{V(Y)}$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y}$.

◆ **Exercice** :

Soit la série statistique suivante :

x_i	100	150	200	300	500
y_i	0,7	1	1,2	1,6	2,3

Donner les résultats arrondi à 10^{-4} près si nécessaire.

1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r .

2) Existe-t-il une relation de type affine entre X et Y.

3) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X .

4) Pour $x = 650$ que peut-on prévoir pour y ?.

♦ **Solution** :

1) • $\overline{X} = \frac{1}{5}(100+150+200+300+500) = 250$;

• $V(X) = \frac{1}{5}\left(100^2+150^2+200^2+300^2+500^2\right) - 250^2 = 20000$

• $\sigma(X) = \sqrt{20000} \approx 141,4214$

• $\overline{Y} = \frac{1}{5}(0,7+1+1,2+1,6+2,3) = 1,36$;

• $V(Y) = \frac{1}{5}\left(0,7^2+1^2+1,2^2+1,6^2+2,3^2\right) - 1,36^2 \approx 0,3064$

• $\sigma(Y) = \sqrt{0,3064} \approx 0,5535$

• $\overline{XY} = \frac{1}{5}\left((100\times0,7)+(150\times1)+(200\times1,2)+(300\times1,6)+(500\times2,3)\right) = 418$

• $Cov(X,Y) = \overline{XY} - \overline{X}\,\overline{Y} = 418 - 250\times1,36 = 78$

• $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \approx 0,9965$

2) $r \approx 0.9965$ donc $0,75 \le r \le 1$ alors il existe une relation de type affine entre X et Y.

3) Equation de la droite de régression de Y en X : $Y = aX + b$

avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = 0,0039$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X} = 0,385$

4) Si $x = 650$ alors $y = 0,0039\times650 + 0,385 = 2,92$

◆ **Utilisation de la calculatrice :** (Exemple pour une calculatrice Sharp)

Le tableau suivant donne la distance de freinage d (en mètres) d'une voiture, en fonction de sa vitesse v (en kilomètres par heure)

v (km / h)	30	40	50	60	70	80
d (mètres)	42	60	80	90	95	110

1) Calculer $\overline{v}$, $\overline{d}$, $V(v)$, $V(d)$, $\sigma(v)$, $\sigma(d)$, $Cov(v,d)$ et le coefficient de corrélation linéaire entre v et d.

2) Déterminer une équation de la droite de régression de d en v ($d = a\,v + b$).

- Choisir le mode statistique double : $\boxed{\text{2ndF}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ $\boxed{2}$

- Entrer les données en tapant
  $\boxed{30}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{42}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{40}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{60}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{50}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{80}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{60}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{90}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{70}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{95}$ $\boxed{\text{M+}}$
  $\boxed{80}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{110}$ $\boxed{\text{M+}}$

- $\overline{v}$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{4}$ $\rightarrow$ $\overline{v} = 55$
- $\overline{d}$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{7}$ $\rightarrow$ $\overline{d} = 79,5$
- $V(v)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\rightarrow$ $V(v) = 291,66$
- $V(d)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\rightarrow$ $V(d) = 511,25$
- $\sigma(v)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\rightarrow$ $\sigma(v) \approx 17,07$
- $\sigma(d)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{9}$ $\rightarrow$ $\sigma(d) \approx 22,61$
- $Cov(v,d)$: $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{=}$ $\rightarrow$ $Cov(v,d) = 379,166$.
- r : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\div}$ $\rightarrow$ $r \approx 0,981$
- a : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{)}$ $\rightarrow$ $a = 1,3$
- b : $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{(}$ $\rightarrow$ $b = 8$
- Donc : $d = 1,3v + 8$