SUITES REELLES : Résumé de cours

1) Définitions : Suite majorée – Suite minorée – Suite Bornée :
Soit U une suite réelle définie sur I

• **Définition 1 :**
U est dite majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in I, u_n \leq M$.

• **Définition 2 :**
U est dite minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in I, \ u_n \geq m$.

• **Définition 3 :**
U est dite bornée s'il existe deux réels m et M tels que : $\forall n \in I \quad m \leq u_n \leq M$. **(c'est à dire à la fois majorée et minorée) .**

2) Monotonie (ou sens de variation) :
Soit $U = (u_n)_{n \in I}$ **une suite réelle ; telle que (si** $n \in I$ **alors** $(n+1) \in I$ **).**

(D₁) : U croissante $\Leftrightarrow$ **pour tout** $n \in I, \ u_{n+1} \geq u_n$.

(D₂) : U décroissante $\Leftrightarrow$ **pour tout** $n \in I, \ u_{n+1} \leq u_n$.

(D₃) : U est strictement croissante $\Leftrightarrow$ **pour tout** $n \in I, u_{n+1} > u_n$.

(D₄) : U est strictement décroissante $\Leftrightarrow$ **pour tout** $n \in I, \ u_{n+1} < u_n$.

(D₅) : U est constante $\Leftrightarrow$ **pour tout** $n \in I, \ u_{n+1} = u_n$.

(C'est à dire tous les termes sont égaux au premier terme).

3) Raisonnement par récurrence :
Soit $P(n)$ **une propriété à démontrer pour tout entier** $n \geq n_0$ **où** n_0 **est un entier naturel donné.**

1ère étape : On vérifie que la propriété est vraie pour l'entier n_0.

2ème étape : $\forall \ k \in \mathbb{N}$ **tel que,** $k \geq n_0$. **Si** $P(k)$ **vraie, alors** $P(k+1)$ **vraie.**

la conclusion : Pour tout $n \geq n_0$ **la propriété** $P(n)$ **est vraie.**

II) Suites particulières :
1) Suites arithmétiques :
Soit $U = (u_n)_{n \in N}$ **une suite réelle.**

***) Définition :**
U est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} - u_n = r$ **c'est à dire** $u_{n+1} = u_n + r$.

***) Terme général :**
• $u_n = u_0 + nr \ , \forall n \in \mathbb{N}$. • $u_n = u_1 + (n-1)r, \ \forall n \in \mathbb{N}$. • $u_n = u_p + (n-p)r, \ \forall n$ **et p de** $\mathbb{N}$.

***) Somme de termes consécutifs :**
Si S est la somme de termes consécutifs de U , alors on a :

$$S = \frac{(\text{Nombre de termes de la somme}) \times (\text{1er terme de la somme} + \text{dernier})}{2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} \quad S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

et pour $(n > p)$; $S''_n = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \dfrac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}$

***) Trois réels en progression arithmétique :**

Trois réels a, b et c sont les trois termes consécutifs d'une suite arithmétique si et seulement si : $b = \dfrac{a+c}{2}$.

2) Suites géométriques :
Soit U une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

***) Définition : U est une suite géometrique s'il existe un réel q tel que pour tout** $n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = q \cdot u_n$; **q s'appelle la raison de U.**

***) Terme général :** $u_n = u_0 q^n = u_1 q^{n-1} = u_p q^{n-p}$, $\forall$**n , p** $\in \mathbb{N}$.($q \neq 0$).

***)Somme de termes consécutifs : si** $\boxed{q \neq 1}$ **; pour tout entiers n et p tels que** $p < n$ **:**

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)} \quad \boxed{S_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right)} \quad \text{et} \quad u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \right)$$

***) Trois réels a, b et c sont dans cet ordre les trois termes consécutifs d'une suite géometrique si et seulement si :** $b^2 = ac$

III) Convergence :
1) Définition : Une suite U est convergente si elle a une limite finie ;si non elle est divergente.

2) Exemples standards :

(1) $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^3}$ **et** $\frac{1}{\sqrt{n}}$ **tendent vers 0 lorsque** $n \to +\infty$.

(2) n, n^2, n^3 **...,** n^k $(k \in \mathbb{N}^*)$ **tendent vers** $+\infty$ **lorsque** $n \to +\infty$.

(3) *Limite d'une suite géométrique* **:** $(u_n = u_0 q^n ; \forall n \in \mathbb{N})$

Si	$-1 < q < 1$	$q > 1$	$q = 1$	$q \leq -1$
Alors	$\lim u_n = 0$	$\lim u_n = +\infty$ **si** $u_0 > 0$ **et** $\lim u_n = -\infty$ **si** $u_0 < 0$	$\lim u_n = u_0$	**U n'a pas de limite**

Cas particulier **:** $u_n = (-1)^n$ **est une suite géométrique de raison** $q = -1$ **; et n'a pas de limite.**

3) Théorèmes :

(1) Si une suite possède une limite celle-ci est unique.
(2) Si une suite est convergente alors elle est bornée.

Attention : La réciproque de (2) n'est pas vraie ! En effet, la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ **est bornée car** $(-1 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N})$ **mais elle n'est pas convergente.**

4) Convergence de suites monotones :

Théorème1 : Toute suite croissante et majorée est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ **et pour tout entier naturel n ;** $u_n \leq \ell$.

Théorème2 : Toute suite décroissante et minorée est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ **et pour tout entier naturel n ;** $u_n \geq \ell$.

Conséquences :

(1) Si une suite U est croissante et non majorée alors $\lim u_n = +\infty$.

(2) Si une suite U est décroissante et non minorée alors $\lim_{n} u_n = -\infty$.

5) Limites et ordre :

•**Théorème1 : Si U est une suite à termes positifs, à partir d'un certain rang , et U est convergente vers** $\ell \in \mathbb{R}$ **alors** $\ell \geq 0$.

•**Théorème 2 : Si U et V deux suites convergentes et** $u_n \leq v_n$ **à partir d'un certain rang, alors** $\lim u_n \leq \lim v_n$.

• **Théorème3 : Soient U et V deux suites réelles et** $\ell \in \mathbb{R}$. **Si** $|u_n - \ell| \leq v_n$ **(pour** $n \geq n_0$**) et** $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ **alors** $\lim u_n = \ell$.

• **Théorème4 : Soient U, V et W trois suites réelles telles que :** $v_n \leq u_n \leq w_n$ **,(pour** $n \geq n_0$**).Si lim** $v_n = \lim w_n = \ell \in \mathbb{R}$ **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

N.B. : Ce théorème est connue comme étant le théorème des gendarmes. En effet, les gendarmes encadrent le criminel ; il ne peut s'enfuir nulle part.

• **Théorème5 : Soient U et V deux suites réelles vérifiant** $u_n \leq v_n$ **, à partir d'un certain rang.**

(1) si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ **alors** $\lim u_n = -\infty$. **(2) si** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **alors** $\lim v_n = +\infty$.

6) Suites et fonctions :

Théorème 1 :

Soit f une fonction, l **un réel et U une suite,**

si $\begin{cases} 1) \text{ f est continue,l} \\ et \\ 2) \text{ la suite U converge vers l} \end{cases}$ **Alors** $(f(u_n))$ **est aussi une suite convergente et converge vers** $f(\ell)$.

Théorème 2 :

Soient f une fonction, U une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ **et** l **un réel.**

Si U est convergente vers l **et f continue en** l **alors on a** $f(l) = l$.

Théorème 3 :

Soit U une suite et f une fonction.

$$\boxed{si \begin{cases} \lim u_n = +\infty \text{ et} \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = b(\mathit{finie} \text{ ou infinie}) \end{cases}}$$

Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = b$.

7) Suites adjacentes :

Définition :

Soient U et V deux suites réelles.
On dit que U et V sont ***adjacentes*** **si :**

$$\begin{cases} 1)\ u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang } n_0 \\ 2) \quad U \text{ est croissante} \\ 3) \quad \text{V est décroissante} \\ 4) \quad \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$$

Théorème 4 :

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers une même limite.