DEVOIR D'EVALUATION

BAC INFO

EX 1 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{{U_n}^2 - U_n + 2}{1 + U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout n∈ IN, on a $1 \leq U_n \leq 2$

b) Etudier la monotonie de (U_n) , en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2) a) montrer que pour tout n ∈ IN, $0 \leq U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) déduire que $0 \leq U_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$.

3) on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a) montrer que $n \leq S_n \leq n + 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$

b) en déduire $\lim_{+\infty} S_n$ et $\lim_{+\infty} \frac{S_n}{n}$

EX 2 :

Soit l'équation (E): $Z^3-4iZ^2-6Z+4i=0$

1) a) Montrer que 2i est une solution de (E).

b) Résoudre dans C, l'équation (E) .

2) Soit dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, , v) , les points A, B et C d'affixes respectives -1+i , 1+i et 2i

a) Calculer OA, OB ; Que peut-on déduire?

b) Montrer que OACB est un carré dont on précisera l'affixe de son centre I.

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que

$$|z| = |z+1-i|$$

EX 3:

1) Résoudre dans C : $Z^2+(6+5i)Z+2+16i=0$

2) Soit $f(z) = Z^3 + 2(3+2i)Z^2 + (7+10i)Z + 16 - 2i$

a) Déterminer le nombre complexe a tel que , pour tout nombre complexe z on a:

$$f(z)= (Z-a)(Z^2+(6+5i)Z+2+16i)$$

b) Résoudre alors l'équation f(Z)=0.

3) Dans le plan P complexe rapporté un repère orthonormé direct (O, , v) ;on considère les points A(i), B(-4-2i) et C(-2-3i) et on désigne par ZI l'affixe du point I milieu de [AC].

a) Représenter les points A, B, C et I

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a) Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B.

b) en déduire les affixes respective ZD et ZE s des points D et E .

EX 4 :

Soit la fonction définie sur IR par f(x) = $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé

1) Montrer que f est dérivable sur IR et que f'(x)= $\frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$
2) Montrer que I(1 ;0) est un centre de symétrie de C .Donner une équation de la tangente à C en I
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que f réalise une bijection de IR sur]-1 ;1[.construire les courbes C de f et C' de f^{-1}.
5) Montrer que $f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1- x^2}}$.

BON CHANCE