Exercice 1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux

1) *On considère les suites* $(x_n),(y_n)$ *et* (z_n) *vérifiant :*

$\otimes$ $x_n \leq y_n \leq z_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ $\otimes$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = -1$ $\otimes$ $\lim\limits_{x\to+\infty} z_n = 1$

a) $\lim\limits_{+\infty} y_n = 0$.

b) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$; $-1 \leq y_n \leq 1$.

c) *on ne sait pas si la suite* (y_n) *a une limite.*

2) *Soient les suites* (u_n) *et* (w_n) *définies par :*

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_0 = 1{,}5$; $u_{n+1} = 2u_n - 1$ *et* $w_n = u_n - 1$

a) *La suite* (w_n) *est une suite géométrique.*

b) *La suite* (w_n) *est une suite majorée.*

c) *La suite* (u_n) *converge vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites d'équations :* $y = x$ *et* $y = 2x - 1$

Exercice 2 : (7 points)

Soit u *la suite définie par* $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3u_n + 1}$ *et* $u_0 > 0$.

1) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$, u_n *existe et* $u_n > 0$.

En déduire la monotonie de u (*on calculera* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$).

2) *La suite est-elle convergente et calculer sa limite éventuelle ?*

3) *Montrer que pour tout* $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{3}$ *puis que pour tout* $n \geq 0$, $u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n u_0$.

Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un ROND $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soit I *le point d'affixe* $z_I = 1$, A *le point d'affixe* $z_A = 1 - 2i$, B *le point d'affixe* $z_B = -2 + 2i$ *et* $\mathscr{C}$ *le cercle de diamètre* $[AB]$.

1) *Représenter les points* I, A, B *et le cercle* $\mathscr{C}$.

2) *Déterminer l'affixe du centre* Ω *du cercle* $\mathscr{C}$ *et calculer son rayon.*

3) *Soit* D *le point d'affixe* $z_D = \dfrac{3 + 9i}{4 + 2i}$.

a) *Ecrire* z_D *sous forme algébrique.*

b) *Montrer que* $D \in \mathscr{C}$

Exercice 4 : (6 points)

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 + (1-3i)z - 3i = 0$

2) *Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct* $(o, \vec{u}, \vec{v})$, *on désigne par A,B,C et D les points d'affixes respectives* (-1), $3i$, $2-i$ *et* $\frac{1}{2}i$.

Soit l'application $f : P \setminus \{A\} \to P$, $M(z) \mapsto M'(z') \,/\, z' = \dfrac{3+iz}{z+1}$.

a) *Vérifier que* $f(D) = C$.

b) *Déterminer la nature du triangle ABC.*

c) *Montrer que pour* $z \neq 1$ *on a* $|z'| = \dfrac{BM}{AM}$. *En déduire l'ensemble des points* $M(z)$ *tel que* $|z'| = 1$.

d) *Déterminer l'ensemble* γ *des points z tel que* z' *est réel.*

Exercice 1 :

1)a) *faux* b) *faux* c) *vrai* $\boxed{1,5}$

2)a) *vrai* b) *faux* c) *faux* $\boxed{1,5}$

Exercice 2 :

1)▪ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2u_n^2 - u_n}{3u_n + 1} \neq Cste$ donc $u_n \neq -\dfrac{1}{3} \Rightarrow (u_n)$ existe. $\boxed{0,5}$

▪ $u_n > 0$ (récurrence). $\boxed{1}$

▪ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2u_n^2 - u_n}{3u_n + 1} < 0$ car $u_n > 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} < 1$ donc $(u_n) \searrow$. $\boxed{1}$

2)▪(u_n) décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge. $\boxed{0,5}$

▪ on pose $f(x) = \dfrac{x^2}{3x+1}$ continue sur $[0,+\infty[$; $f(u_n) = u_{n+1}$ $\boxed{1}$

(u_n) converge vers $\ell \in [0,+\infty[$ on a :

$f(\ell) = \ell \Leftrightarrow 2\ell^2 + \ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = -\dfrac{1}{2}$ (à rejeter) donc $\lim u_n = 0$.

3) $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n\left(3 + \dfrac{1}{u_n}\right)} = \dfrac{u_n}{3 + \dfrac{1}{u_n}} \leq \dfrac{u_n}{3}$ ou $u_{n+1} - \dfrac{u_n}{3} = \dfrac{-u_n}{3u_n + 3} < 0$ d'où $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{3}$. $\boxed{1}$

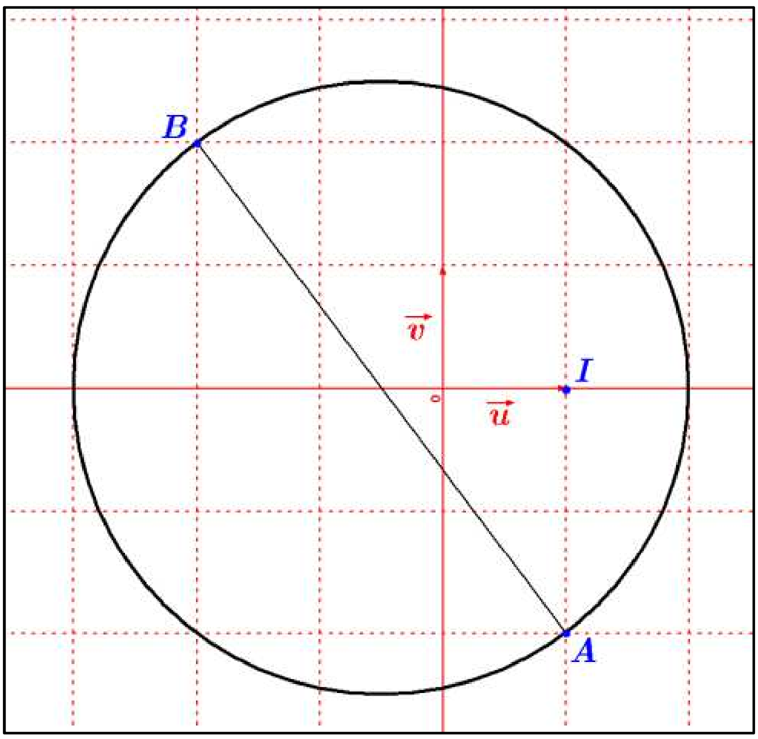
▪ vérifions pour $n = 0$; $u_0 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 u_0$ vrai, supposons $u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n u_0$, $n \in \mathbb{N}$ montrons que

$u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} u_0$, on a $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{3} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n u_0 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} u_0$. $\boxed{1}$

▪ $\lim \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ et $0 \leq u_n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n u_0$ donc $\lim u_n = 0$. $\boxed{1}$

Exercice 3 :

1)



$\boxed{1}$

2) $\Omega = A * B$; $z_{\Omega} = \dfrac{z_A + z_B}{2} = -\dfrac{1}{2}$; $r = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\left|z_B - z_A\right| = \dfrac{5}{2}$. $\boxed{0,5}$ $\boxed{0,5}$

3)a) $z_D = \dfrac{3+3i}{2}$. $\boxed{1}$

b) $\Omega D = \left|z_D - z_{\Omega}\right| = \dfrac{5}{2} \Rightarrow D \in \mathscr{C}$. $\boxed{1}$

Exercice 4 :

1) $z^2 + \left(1-3i\right)z - 3i = 0$; $a - b + c = 0$; $z_1 = -1$; $z_2 = 3i$; $S_{\mathbb{C}} = \left\{-1, 3i\right\}$. $\boxed{1}$

2)a) $z_D = \dfrac{1}{2}i$; $f(D) = \dfrac{3 + i\left(\dfrac{1}{2}i\right)}{\dfrac{1}{2}i + 1} = 2 - i$ donc $f(D) = C$. $\boxed{1}$

b) $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{10}$; $BC = \sqrt{20}$ ABC est un triangle rectangle isocèle. $\boxed{1}$

c) $\left|z'\right| = \dfrac{\left|i\left(z + \dfrac{3}{i}\right)\right|}{\left|z+1\right|} = \dfrac{\left|z - 3i\right|}{\left|z+1\right|} = \dfrac{BM}{AM}$ $\boxed{1}$

$\left|z'\right| = 1 \Leftrightarrow BM = AM$ l'ensemble des points $M\left(z\right)$ est la médiatrice $\left[AB\right]$. $\boxed{1}$

d) $M \in \gamma \Leftrightarrow \overline{z}' = z$ $z \neq -1$; on a $\left(\dfrac{3 - i\overline{z}}{\overline{z}+1}\right) = \left(\dfrac{3 + iz}{z+1}\right) \Leftrightarrow -2iz\overline{z} + 3\left(z - \overline{z}\right) - i\left(\overline{z} + z\right) = 0$

on pose $z = x + iy$ $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; $-2i\left(x^2 + y^2\right) + 6iy - 2ix = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y - x = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{10}{4}$

d'où $\gamma = \mathscr{C}_{\left(I\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right), \frac{\sqrt{10}}{2}\right)} \setminus \left\{A\right\}$ $\boxed{1}$