

LYCEE ABOULOUBABA GABES	DEVOIR DE CONTROLE	Prof : S-SOLA
A-S : 2009/2010	N° :1	SECTION : 4 Inf <sub>2</sub>
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 2h	COEFFICIENT : 3

**NB :** +Le sujet comporte 2 pages.

+L'utilisation de la calculatrice est autorisée.

+ L'usage de correcteur est interdit.

+ La présentation est appréciée.

+La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

### **EXERCICE N°1 :** ( 4 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte ou l'absence de réponse est comptée 0 point.

1) On considère trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  ayant, pour tout entier naturel  $n$ , les propriétés suivantes :  $u_n \leq v_n \leq w_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1$ . Alors :

a.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

b. Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $-1 \leq v_n \leq 1$

c. On ne sait pas dire si la suite  $(v_n)$  a une limite ou non.

2) On considère la suite  $U$  géométrique de premier terme  $U_1 = 2$  et de raison  $q = \frac{1}{3}$

Son terme général  $U_n$  vaut :

a.  $\frac{2}{3^n}$

b.  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c.  $\frac{2}{3^{n-1}}$

3) Si  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite définie par  $U_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$  alors  $(U_n)$

a. tend vers  $+\infty$

b. est convergente

c. n'a pas de limite.

4) Soit  $p$  un nombre premier.

a.  $p \wedge p^2 = 1$

b.  $p \wedge p^2 = p$

c.  $p \wedge p^2 = p^2$

### **EXERCICE N°2 :** ( 6 pts)

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 4\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right) \end{cases}$$

1) a. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_{n+1} = 4\left(1 - \frac{1}{U_n}\right)$ .

b. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_n > 2$ .

c. Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n - 2)^2}{U_n}$ .

d. Dédurre que la suite  $(U_n)$  est décroissante.

e. En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

2) Soit  $(V_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ .

a. Montrer que  $(V_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$ .

b. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

c. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  et retrouver  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .



**EXERCICE N°3:**( 6 pts)

Une fonction  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R} - \{4\}$  et dont le tableau de variation est le suivant :

X	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$ 3 $-\infty$

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
b) Etudier le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .
2. Lorsque cela est possible déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{f(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$$

3. Répondre par vrai ou faux sans justification.

- a) 1 est un minimum local de  $f$ .
- b) 3 est un maximum local de  $f$ .
- c) La droite d'équation  $x = 4$  est une asymptote à  $(C_f)$ .
- d) La droite d'équation  $y = 3$  est une asymptote à  $(C_f)$ .

**EXERCICE N°4:**( 4 pts)

On considère l'équation (E) :  $11x + 9y = 3$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- 1) Montrer que (E) admet au moins une solution.
- 2) Vérifier que  $(6, -7)$  est une solution de (E).
- 3) Montrer  $(x, y)$  est solution de (E) si et seulement si  $11(6-x) = 9(y+7)$ .
- 4) En déduire les solutions de (E).

BON TRAVAIL

