

Lycée secondaire : 18 / 01 / 52 Djebeniana : 29 / 10 / 2010	DEVOIR DE CONTRÔLE N°1 (MATHÉMATIQUES)	Profs: ABID HASSEN Classes: 4 ^{ème} année Sc info 1& 2 Durée : 2 heures
--	---	--

Exercice n°1 : (3 points)

Trouver la seule bonne réponse. (aucune justification n'est demandée)

1) Si $U_n = \frac{3-6n}{1+2n}$ alors la suite (U_n) :

- a) converge vers 0 b) converge vers -3 c) diverge

2) La forme algébrique de $(1-2i)^2$ est :

- a) $5-2i$ b) $-3+4i$ c) $-3-4i$

3) Soit x un réel. Le nombre complexe z défini par : $z = \frac{x+2i}{x-2i}$ a pour module :

- a) 1 b) $\frac{x+2}{x-2}$ c) $\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-2}}$

Exercice n°2 : (6.5 points)

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a – Calculer U_1 et U_2 .

b – En déduire que la suite U n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 < U_n < 2$.

3) a – Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

b – En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

4) Soit V la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$

a – Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b – Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c – Retrouver alors la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°3 : (3.5 points)

Soit la fonction f définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \sqrt{x^2 + 2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x - \sin(\frac{\pi}{3}x)}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a – Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{x-1}{x+1} \leq f(x) \leq 1$.

b – Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice n°4 : (7 points)

- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, u, v) , on désigne par A, B, C et I les points d'affixes respectives $2i$, $-4i$, $3-i$ et $-i$.
- 1) a – Placer les points A, B et C .
b – Montrer ABC est un triangle isocèle et rectangle.
c – Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD soit un carré.
- 2) A tout point M du plan distinct de B et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe u défini par $u = \frac{z-2i}{iz-4}$
a – Calculer u sachant que $z = 2 - 3i$.
b – Calculer z sachant que $u = 2 - 3i$.
- 3) a – Vérifier que pour tout $z \neq -4i$; $u = \frac{i(z-2i)}{-z-4i}$.
b – Déterminer l'ensemble des points M tel que $|u| = 1$.
- 4) a – Montrer que $|u+i| \times |z+4i| = 6$.
b – En déduire que si M appartient à un cercle ζ de centre B et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle ζ' qu'on déterminera le centre et le rayon .