

Date : 12 / 11 / 2011

Prof : Meddeb Tarak

Durée : 2 heures

**Exercice n°1 : (3 pts)**

Pour chaque question  $Q_i$ , une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est exacte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie sans justification.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

$Q_1$  : Si l'équation (E):  $z^2 + bz + i = 0$  admet  $z_1 = i$  comme solution dans  $\mathbb{C}$  alors  $b$  est égal à :

a/  $1 - i$

b/  $-1 - i$

c/  $1 + i$

$Q_2$  : soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = 3$ , alors sa courbe  $C_f$

dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  admet au voisinage de  $+\infty$  une asymptote d'équation :

a/  $y = x - 3$

b/  $y = x + 3$

c/  $y = -x + 3$

C est la courbe représentative d'une fonction continue sur  $[-1, 4]$ .

(voir figure)

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$Q_3$  : La suite  $U$  est :

a/ Croissante.

b/ Décroissante.

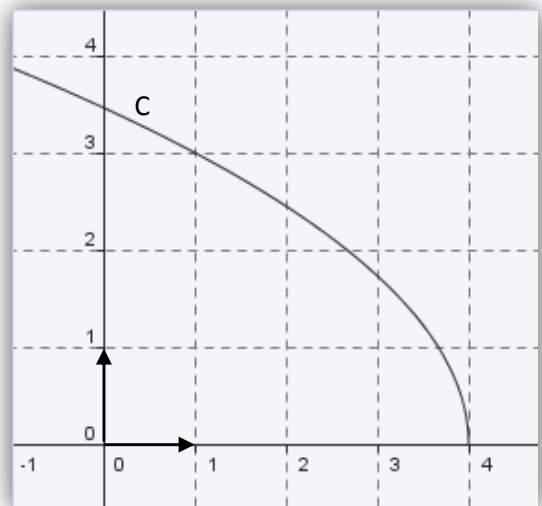
c/ N'est pas monotone.

$Q_4$  : La suite  $U$  est :

a/ Convergente vers un réel  $l \in \left] 2, \frac{5}{2} \right[$ .

b/ Convergente vers un réel  $l \in \left] \frac{5}{2}, 3 \right[$ .

c/ Divergente.



**Exercice n°2 : ( 6 pts)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - 2x$ .

On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a/ Soit  $x$  un réel, comparer  $x^2 - x$  et  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ .

b/ En déduire que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) \leq -\frac{1}{2} - x$ .

c/ Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2) On admet que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $f(x) \geq -1 - x$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

3) a/ Montrer que, pour tout  $x \geq 1$ , on a :  $f(x) + x = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1}$ .

b/ En déduire que la droite  $\Delta$  d'équation :  $y = -x - \frac{1}{2}$  est une asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$ .

c/ Etudier la position de  $C_f$  par rapport à  $\Delta$ .

4) La courbe ci-contre est la représentation

graphique d'une fonction  $g$  définie sur

$\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

La droite  $D$  est une asymptote à la courbe au voisinage de  $+\infty$ , et la droite d'équation :  $y = 4$  est une asymptote à la courbe au voisinage de  $-\infty$ .

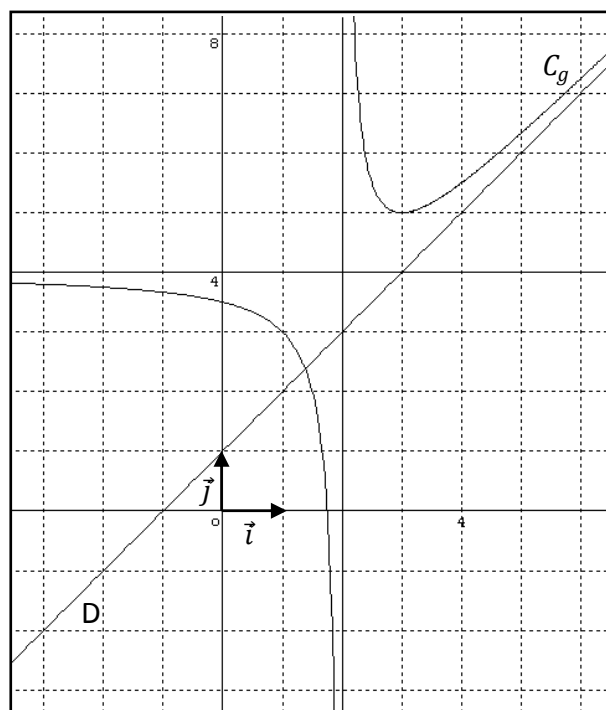
a/ Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x - 1)$ .

b/ Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f \circ g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x).$$



**Exercice n°3 : (5,5 pts)**

Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 4 \left( 1 - \frac{1}{U_n} \right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a/ Montrer, par récurrence, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $U_n > 2$ .  
b/ Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 2)^2}{U_n}$ . En déduire le sens de variation de la suite  $U$ .  
c/ Déduire de ce qui précède, que la suite  $U$  est convergente, et déterminer sa limite.
- 2) On pose :  $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
a/ Montrer que  $V$  est une suite arithmétique.  
b/ Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
c/ Retrouver la limite de la suite  $U$ .

**Exercice n°4 : (5,5 pts)**

- 1) a/ Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe  $(2 + 3i)^2$ .  
b/ Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  
$$z^2 - (2 + 7i)z - 10 + 4i = 0.$$
- 2) On pose :  $f(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-4 + 25i)z + 30 - 12i$ .  
a/ Calculer  $f(3)$ .  
b/ En déduire que :  $f(z) = (z - 3)(z^2 + bz + c)$  où  $b$  et  $c$  sont deux nombres complexes que l'on déterminera.  
c/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $f(z) = 0$ .
- 3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ . On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $z_A = 2i$ ,  $z_B = 3$  et  $z_C = 2 + 5i$ .  
a/ Montrer que :  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ .  
b/ En déduire que le triangle  $ABC$  est rectangle et isocèle en  $A$ .

**Bonne chance**

