Site web : http://www.matheleve.net/ Email1 :contact@matheleve.net Email2 :matheleve@gmail.com	**Devoir de contrôle n°01**		
Lycée Ali Bourguiba Bembla	4 ème Inf	Samedi 17-11-2012	Chortani Atef

Exercice 1(3 points)

Dans chacun des cas suivants déterminer le domaine de dérivabilité de f et sa fonction dérivée f'

1) $f(x) = \sqrt{x^6 + x^2 + 4} - x$

2) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 2}$

3) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2+1}$

Exercice 2 (6 points)

1) a)Calculer $(3+\mathrm{i})^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) :$z^2 + (1+3\mathrm{i})z - 4 = 0$

2) Soit l'équation (E_2) :$z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (2-2\mathrm{i})z + 8\mathrm{i} = 0$

a)Vérifier que pour tout nombre complexe z on a :

$$z^3 + (1+\mathrm{i})z^2 + (2-2\mathrm{i})z + 8\mathrm{i} = (z-2\mathrm{i})(z^2 + (1+3\mathrm{i})z - 4)$$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_2)

2) le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$ et $-2-2\mathrm{i}$

a)Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$

b) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B

Exercice 3 (4,5 points)

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1)a)Calculer le déterminant de A en déduire que inversible

b) Calculer $A^2 - A$ en déduire A^{-1}la matrice inverse de A.

2) On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$S: \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

a)Donner l'écriture matricielle de (S).

b) Résoudre dans IR^3 le système (S).

Exercice 4 (6,5points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4 + \dfrac{1}{x}} - x$

On désigne par (φ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1)a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ Interpréter géométriquement ce résultat·

b)Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote à (φ)

c)Etudier la position relative de par rapport à (φ)

2)a)Montrer que pour tout $x \in\,]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{4x^2+x}} - 1$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α.

b) Vérifier que $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$ et que $\alpha = \dfrac{1}{4}(\alpha^3 - 1)$

c)En déduire le signe de f

d) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans un intervalle J que l'on précisera

4) Construire(φ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Correction de devoir

Exercice 1

1) $f(x)=\sqrt{x^4+x^2+1}-x$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{4x^3+2x}{2\sqrt{x^4+x^2+1}}-1$

$=\dfrac{2x^3+1}{2\sqrt{x^4+x^2+1}}-1$

2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+x+2-x(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$

$=\dfrac{-x^2+2}{(x^2+x+2)^2}$

3) $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2+1}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{2x(x+1)}{2\sqrt{x^2+1}}$

$=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 2

1) a) $(3+i)^2=9+6i-1$

$=8+6i$

b) $(E_1): z^2+(1+3i)z-4=0$

$\left.\begin{array}{l} a=1\\ b=1+3i\\ c=-4\end{array}\right\}$ $\Delta=(1+3i)^2-4\times(-4)$

$=8+6i=(3+i)^2$

$z=\dfrac{-(1+3i)-(3+i)}{2}$ ou $z=\dfrac{-(1+3i)+(3+i)}{2}$

$=-2-2i$ $\quad\quad$ $=1-i$

$S_{\mathbb{C}}=\{1-i\ ;\ -2-2i\}$

2) a) $(z-2i)(z^2+(1+3i)z-4)$

$=z^3+(1+3i)z^2-4z-2iz^2-2i(1+3i)z+8i$

$=z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i$

b) (E_2) : $z^3+(1+i)z^2+(2-2i)z+8i=0$

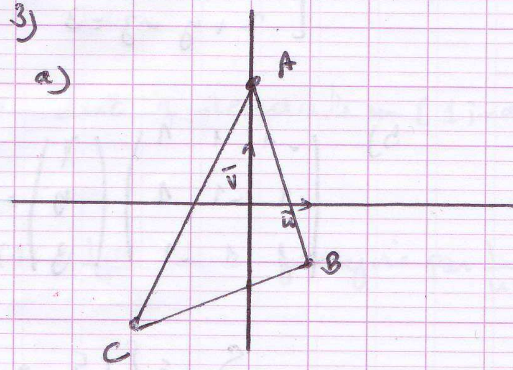
$\Leftrightarrow z-2i=0$ ou $z^2+(1+3i)z-4=0$

$z=2i$ $\quad|\quad$ $z=1-i$ ou $z=-2-2i$

$S_{\mathbb{C}}=\{2i\ ;\ 1-i\ ;\ -2-2i\}$

3)

a)



b) $AB=|1-i-2i|=|1-3i|=\sqrt{10}$

$AC=|-2-2i-2i|=|-2-4i|=\sqrt{20}$

$BC=|-2-2i-1+i|=|-3-i|=\sqrt{10}$

$\left.\begin{array}{l} BA=BC\\ BA^2+BC^2=AC^2\end{array}\right\}$ ABC Triangle rectangle isocèle en B

Exercice 3

1) a) $\det A = 0\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc A inversible

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$a_{11} = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = 0\times 0 + 1\times 1 + 1\times 1 = 2$$

$$A^2 - A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 2I_3$$

$$A^2 - A = 2I_3 \Leftrightarrow A(A - I) = 2I_3$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

2)

a) $$\begin{cases}-x + y + z = 1\\ x - y + z = 2\\ x + y - z = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ 2\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)\right\}$$

Exercice 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x} \quad \text{si } x \in [1;+\infty[\setminus \{2\} = D_f$$

I)

1) $x \mapsto x-1$ poly positive sur D_f
$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{x-1}$ continue sur D_f
$x \mapsto x^2-2x$ polynome non nulle sur D_f

} f continue sur D_f

2) $$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{x(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{4}$$

II)

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1) $$g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim \frac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim \frac{1}{2-x} - \sqrt{1-x} = 1$$

$$g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = 1$$ Donc g continue en 1

2) a) g dérivable sur $[1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x-1}+1+x\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\left(x(\sqrt{x-1}+1)\right)^2} < 0$$ donc g décroissante sur $[1;+\infty[$

b) si $x \in [1;+\infty[\underset{g(\searrow)}{\Longrightarrow} g(x) \leq g(1) = \frac{1}{4}$ donc g majorée par $\frac{1}{4}$ sur $[1;+\infty[$

3) g est dérivable sur $]-\infty,1[$

$$g'(x) = \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0 \Rightarrow g \text{ croissante sur }]-\infty,1[$$

4) a) sur $[1;+\infty[$ on a $g(x) = \dfrac{1}{x(\sqrt{x-1}+1)} > 0$

$\Rightarrow$ Pour tout $x \in [1;+\infty[$ on a $g(x) \neq 0$

sur $]-\infty,1]$ on a :

- g continue strictement croissante
- $g(0) = -\frac{1}{2} < 0$, $g(1) = \frac{1}{4} > 0$ } $g(0) \times g(1) < 0$

L'éq $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$

b) $g(0,5) = \dfrac{4-3\sqrt{2}}{6} \simeq -0,04 < 0$

$g(0,75)$ $0,3 > 0$

$\alpha \in]0,5\ ;\ 0,75[$

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d) $\alpha \in]0,1[\Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$

$$g(\alpha) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}+1\right)}$$

$$= \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}+\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{\alpha}}{\frac{1}{2-\alpha}+\sqrt{\alpha}} \quad \left(\text{car } \frac{1}{2-\alpha}-\sqrt{1-\alpha}=0\right)$$

$$= \frac{\alpha(2-\alpha)\sqrt{\alpha}}{1+(2-\alpha)+\sqrt{\alpha}}$$