Devoir de contrôle n°①	Prof : NOBBIGH Dhaou
$4^{\text{ème}}$ Sciences de l'informatique	Mardi 11 novembre 2014
	Durée : 2 Heures

EXERCICE ① — 6 points

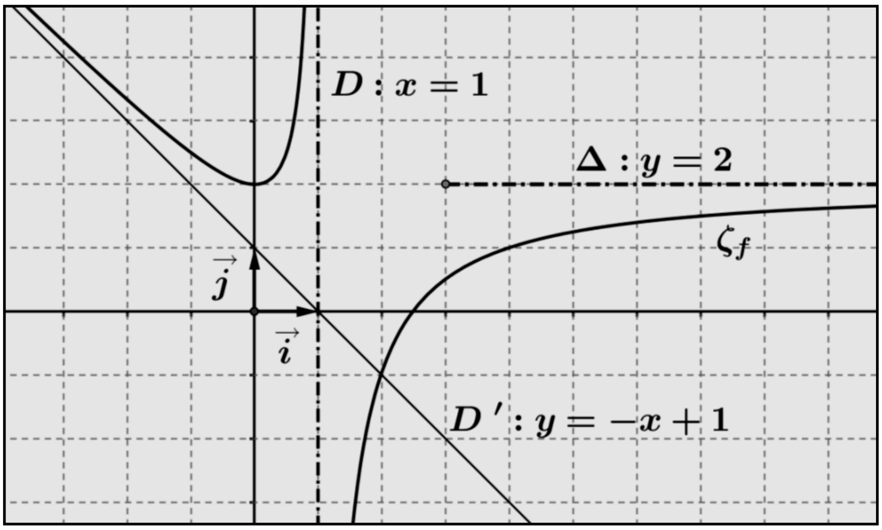
1) Dans la figure ci-contre :

∗ $\mathbf{C_f}$ est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}};\vec{\mathbf{j}})$.

∗ La droite $\Delta : \mathbf{y = 2}$ est une asymptote à $\mathbf{C_f}$ au voisinage de $+\infty$.

∗ La droite $\mathbf{D} : \mathbf{x = 1}$ est une asymptote verticale à $\mathbf{C_f}$.

∗ La droite $\mathbf{D'} : \mathbf{y = -x+1}$ est une asymptote oblique à $\mathbf{C_f}$ au voisinage de $-\infty$.



Par lecture graphique :

a) Résoudre dans IR, l'équation : $\mathbf{f(x) = 2}$

b) Préciser $\lim\limits_{1^-} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{1^+} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{+\infty} \mathbf{f(x)}$; $\lim\limits_{-\infty} \mathbf{f(x)}$ et $\lim\limits_{-\infty} (\mathbf{f(x) + x - 1})$

c) Dresser le tableau des variations de f.

2) Soit g une fonction définie et continue sur $\mathbf{IR} \setminus \{2\}$ et dont le tableau des variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$	0	↘	-2	↗	$+\infty$ ‖ 6	↘	$-\infty$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\mathbf{g \circ f}$.

b) Déterminer $(\mathbf{g \circ f})(\mathbf{2})$; $\lim\limits_{\mathbf{0}} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$; $\lim\limits_{\mathbf{1^-}} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$ et $\lim\limits_{+\infty} (\mathbf{g \circ f})(\mathbf{x})$

c) Déterminer le sens des variations de la fonction $\mathbf{g \circ f}$ sur l'intervalle $[\mathbf{2}\,;+\infty[$

EXERCICE ② — 7 points

Soit U la suite définie sur IN par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n+6}{4+U_n}$ pour tout entier naturel n.

1) a) Calculer U_1 et U_2.
   b) Justifier que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = 3 - \frac{6}{4+U_n}$
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $-3 < U_n < 2$
   c) Montrer que la suite U est croissante.
   d) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.
3) Pour $n \in$ IN, on pose $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+3}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $U_n = \frac{2+3V_n}{1-V_n}$.
   b) Montrer que la suite V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$
   c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   d) Retrouver alors $\lim\limits_{+\infty} U_n$

EXERCICE ③ — 7 points

1) a) Mettre sous forme cartésienne le nombre complexe $(4-2i)^2$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + (2-4i)z - 6 = 0$.
2) Pour un nombre complexe z, on pose : $f(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2+4i)z - 12i$.
   a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.
   b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que : $f(z) = (z+2i)(z^2+bz+c)$.
   c) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$.
3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2i$; $1+i$ et $-3+3i$. Soit D le symétrique de C par rapport à O
   a) Justifier que $z_D = 3-3i$
   b) Placer les points A, B, C et D.
   c) Calculer AB, AD et BD. En déduire la nature du triangle ABD.
   d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|\bar{z} + 3 + 3i| = |z + 2i|$