Lycée Tahar Sfar
Mahdia

DEVOIR DE CONTROLE N° 2

Mathématiques

Classe : 4 ème Info

Date : 11 / 02 / 2012

Prof : Meddeb Tarak

Durée : 2 heures

Exercice n°1 : (4 pts)

1) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

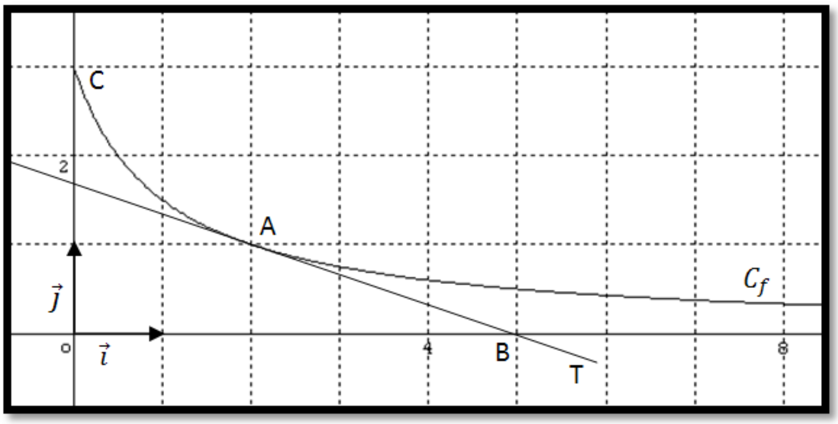
$a/$ Calculer le déterminant de M, en déduire que M est inversible.

$b/$ Montrer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Résoudre dans IR^3 le système : $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$.

Exercice n°2 : (7 pts)

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative C_f d'une fonction f dérivable sur $[0\,,+\infty[$. On désigne par $f\,'$ la fonction dérivée de f.



On sait que :

- L'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
- La courbe C_f passe par les points $A(2\,;1)$ et $C(0\,;3)$.
- La tangente T à C_f au point A passe par $B(5\,;0)$.

1) A partir du graphique et des renseignements fournis :

$a/$ Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f'(2)$.

$b/$ Ecrire une équation de T.

2) Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

$a/$ Calculer : $g(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$b/$ Etudier les variations de la fonction g sur $[0\,,+\infty[$

3) Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   $a/$ Calculer : $\lim_{x\to0^+} h(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)$.

   $b/$ Calculer $h'\left(\frac{1}{2}\right)$.

4) $a/$ Montrer que f réalise une bijection de $[0\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

   $b/$ On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f.

   Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

   $c/$ Montrer que f^{-1} est dérivable sur J. Calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice n°3 : *(4 pts)*

1) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

   $a/$ Etudier les variations de g.

   $b/$ Calculer $g(-1)$, en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x^3-2}{x^2+1}$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$, $f'(x) = \frac{x.g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.

   $b/$ Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n°4 : *(5 pts)*

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, montrer que les nombres 87 et 31 sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation $(E) : 87x + 31y = 2$, où x et y sont deux entiers relatifs.

   $a/$ Dire pourquoi cette équation admet des solutions.

   $b/$ Vérifier que le couple $(x_0\,;\,y_0) = (10\,;\,-28)$ est solution de (E).

3) Soit l'équation $(E') : 87x + 31y = 0$, où x et y sont deux entiers relatifs.

   $a/$ Démontrer l'équivalence :

   $(x\,;y)$ est solution de (E) si, et seulement si $(x - x_0\,;y - y_0)$ est solution de (E').

   $b/$ Résoudre l'équation (E').

   $c/$ En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Bonne chance