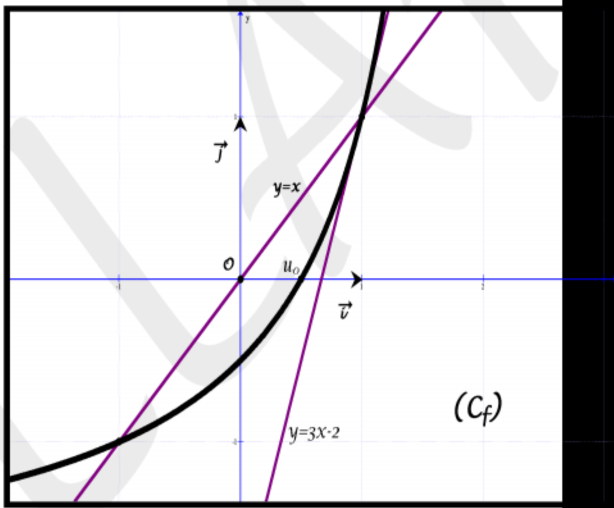
Lycée secondaire : Ali Bourguiba Kalâa Kbira		*Année scolaire : 2010-2011*
Epreuve : Mathématiques	*Devoir de contrôle n° 3*	*Durée : 2 heures*
Professeur : Maâtallah	*Date : Le 14-04-2011*	*Classe : 4Info*

Exercice n° 1:

f est une fonction définie sur $]-2,2[$ par : $f(x)=\frac{1-2x}{x-2}$ et est représentée ci-dessous . Dans cet exercice , la *1ière partie* et la *2ième partie* sont indépendantes .

1ière partie :



Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ \forall\, n\in\mathbb{N}\;,\; u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1) Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}, -1\le u_n\le 1$ et que u est décroissante

2) Déduire que u converge et déterminer sa limite .

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1+u_n}{1-u_n}$

a) Montrer que v est géométrique de raison $\frac{1}{3}$

b) Exprimer u_n en fonction de n et retrouver sa limite .

c) Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n} v_k$. Déterminer n pour que : $S_n=\frac{211}{54}$

2ième partie :

Soit g la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2},2\right[$ par : $g(x)=-ln\,(f(x))$ et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{e_1},$

1) Justifier que : $\forall\, x\in\left]\frac{1}{2},2\right[$, $g'(x)<0$. Dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(1)$ et vérifier que $g'(1)=-3$. Déduire une équation de la tangente T à (C_g) au point d'abscisse 1

3) a) Montrer que $g(x)=x$ admet dans $\left]\frac{1}{2},2\right[$ une solution unique $\alpha\in\left]\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} . Construire (C_g) , T et $(C_{g^{-1}})$ dans $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

4) a) Montrer que $F(x)=(x-2)ln\,(x-2)-\left(x-\frac{1}{2}\right)ln\,(2x-1)$ est une primitive de g sur $\left]\frac{1}{2},2\right[$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par (C_g) , $(O,\vec{e_1})$ et les droites d'équations : $x=1$ et $x=\alpha$.

c) Déduire l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine limité par (C_g) , $(C_{g^{-1}})$ et les axes du repère .

Exercice n° 2:

Soit la fonction h définie sur $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ par : $h(x)=xln(x)$ et la suite $(t_n)_{n\ge 4}$ définie par : $t_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} h(x)\,dx$.

1) a) Dresser le tableau de variation de h . Déduire que : $\forall\, n\ge 4$, $h\left(\frac{1}{n}\right)\le h(x)\le h\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

b) Montrer que : $\forall\, n\ge 4$, $\frac{ln(n+1)}{n(n+1)^2}\le t_n\le\frac{ln(n)}{(n+1)n^2}$. Déduire la limite de (t_n) .

2) a) Soit $\forall\, n\ge 4$, $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} h(x)\,dx$. A l'aide d'une intégration par parties , calculer I_n

b) Calculer $S_n=\int_{\frac{1}{4}}^{1} h(x)\,dx+(\,t_4+t_5+\cdots+\,t_{n-1})$, $\forall\, n\ge 4$. (S_n) est-elle convergente ?

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et la bonne présentation de la copie