

EXERCICE N°1 : (3 points)

On considère une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f(x)	$+\infty$		0	$+\infty$	0

Le tableau de variation est complété par des flèches indiquant la direction de la fonction : une flèche descendante de $+\infty$ à -2, une flèche ascendante de -2 à $+\infty$, et une flèche ascendante de $-\infty$ à 0. Une ligne verticale double est tracée à $x=2$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Répondre par vrai ou faux sans justification.

Une réponse correcte vaut **0,5** point, une réponse fautive vaut **- 0,5** point et l'absence de réponse vaut **0** point.

Si le résultat global est négatif la note de l'exercice est amenée à 0 .

- 1) $f'(-1) = 0$.
- 2) -2 est un minimum global de f .
- 3) $f(0) < 0$.
- 4) Pour tout $x \in [-1, 2[$, $f'(x) \geq 0$.
- 5) Dans l'intervalle $] -\infty, 1]$, l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions distinctes
- 6) La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote à (C) .

EXERCICE N°2 : (6 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose $p(z) = z^3 - (1 - 2i)z^2 + (3 - 2i)z - 3$.

a - Vérifier que $p(z) = (z - 1)(z^2 + 2iz + 3)$

b - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $p(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on désigne par A , B et C les points d'affixes respectives 1 , $-3i$ et i

A tout point M du plan distinct de B et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-1}{3-iz}$

a - Vérifier que pour tout $z \neq -3i$; $z' = \frac{i(z-1)}{z+3i}$

b - Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

c - Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

3) a - Montrer que $|z' - i| \times |z + 3i| = \sqrt{10}$.

b - En déduire que si M appartient à un cercle ζ de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera le centre et le rayon .

EXERCICE N°3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

- 1) a - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
b - Dresser le tableau de variation de g .
c - En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) > 0$
- 2) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x / g(x)$.
a - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = g(x)$.
b - Etudier les variations de f
- 3) a - Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera
b - Soit f^{-1} la réciproque de f . Etudier la continuité et le sens de variation de f^{-1} .
- 4) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

EXERCICE N°4 : (6 points)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{4 + 3U_n} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) a - Montrer que la suite (U_n) est majorée par 4.
b - Montrer que la suite (U_n) est croissante.
c - En déduire que la suite (U_n) converge et déterminer sa limite.
- 2) a - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (4 - U_n)$
b - En déduire que : $4 - U_n \leq \frac{1}{2^n} (4 - U_0)$.
c - Retrouver alors la limite de (U_n) .