

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

NOM : PRENOM :

CLASSE : NUMERO :

Exercice n°1 : Cocher la réponse exacte.

Soit f une fonction définie, dérivable et strictement croissante sur \mathbb{R} tel que $f(x) < 0$ si $x < 2$ et $f(x) > 0$ si $x > 2$. ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

La droite d'équations $y = 2x - 1$ est une asymptote à ζ_f en $(+\infty)$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$(+\infty)$

$(-\infty)$

0

2) La tangente T à ζ_f au point $M(2, 0)$ passe par le point $I(-1, -2)$ alors

$f'(2) = -\frac{2}{3}$

$f'(2) = \frac{2}{3}$

$f'(2) = -\frac{1}{3}$

3) Soit g une fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (f(x))^2$ alors la fonction g est strictement croissante sur :

\mathbb{R}

$]2, +\infty[$

$] -\infty, 2[$

Exercice n°2 :

1) a- Vérifier que : $(3+i)^2 = 8+6i$

b- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (5+3i)z + 2+6i = 0$

2) Soit f l'application de \mathbb{C} dans lui-même définie par : $f(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 4(2-i)z - 12 + 4i$

a- Calculer $f(-2i)$

b- Déterminer les nombres complexes b et c pour que $f(z) = (z+2i)(z^2+bz+c)$.

c- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C, d'affixes respectives $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$.

a- Placer les points A, B et C dans le repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

b- Montrer que ABC est un triangle isocèle.

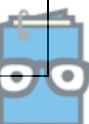
c- Déterminer l'affixe z_D du point D pour que le quadrilatère ABCD soit un losange.

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2) a- Montrer que f dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{-1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}$



b- Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe représentative ζ_f

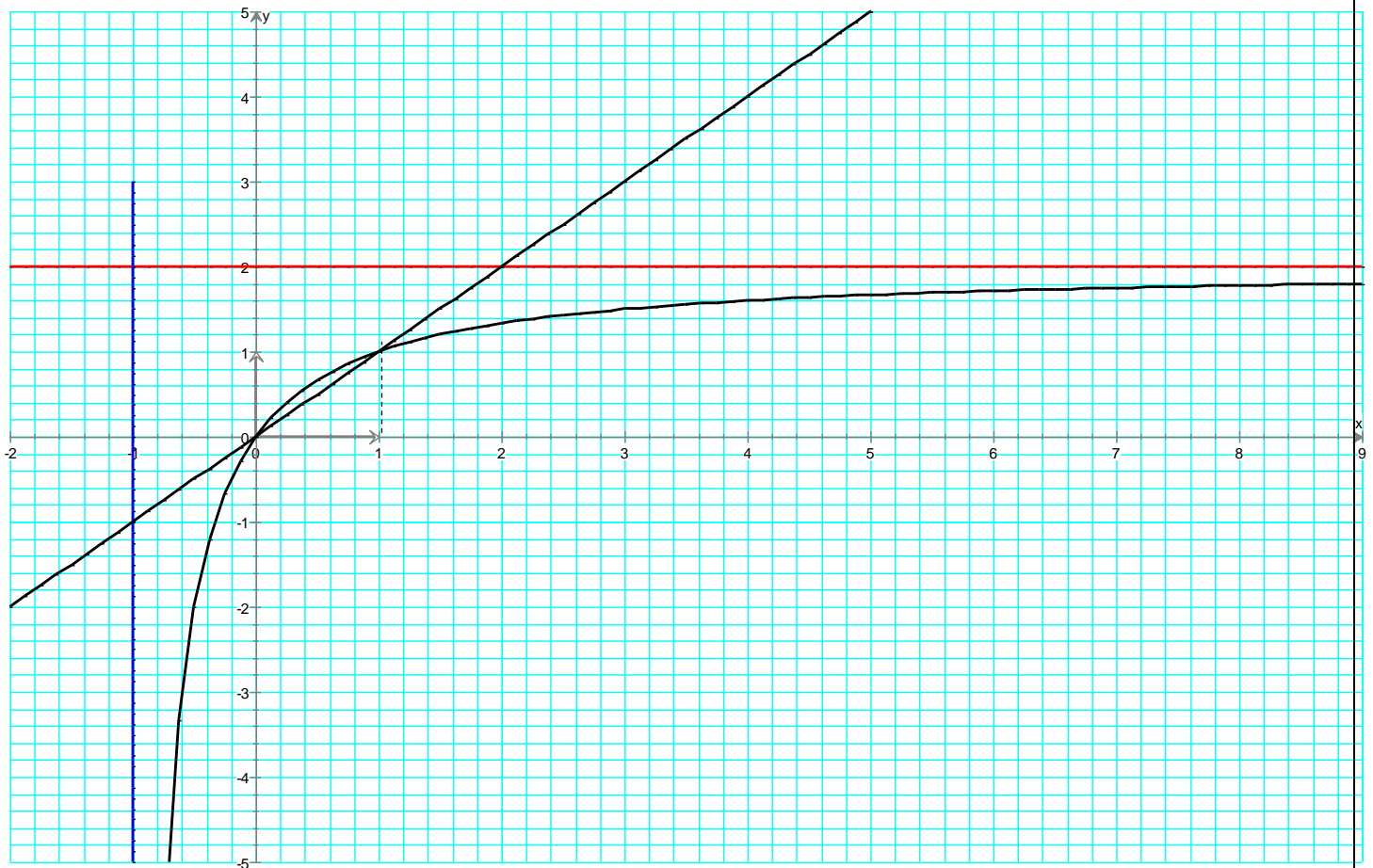
3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

4) a- Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle \mathbf{J} que l'on précisera.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbf{J}$

c- Tracer la courbe ζ' de f^{-1} dans le même repère.

Exercice n° 4 :



Dans la figure ci-dessus on a la représentation graphique ζ_f d'une fonction f définie sur $]-1, +\infty[$. Les droites d'équations $y = 2$ et $x = -1$ sont deux asymptotes à ζ_f et D la droite d'équation cartésienne $y = x$ tel que $\zeta_f \cap D = \{O(0,0), A(1,1)\}$

1) En utilisant le graphique

a- Déterminer le tableau de variation de f .

b- Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $]-1, +\infty[$.

2) On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$

a- construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 .

b- Que peut-on conjecturer concernant la convergence de la suite (u_n) .

3) a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} ; u_n \geq 1$

b- Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c- En déduire alors que la suite (u_n) est convergent et déterminer sa limite

FIN

