

EXERCICE N : 1 (8 points)

A) On considère les matrices : $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer $\det(M)$ et déduire que M est inversible .

b) Calculer $M \times N + M$.

c) Déduire alors que la matrice inverse de M est : $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2) En utilisant la matrice M^{-1} , résoudre le système suivant : (S)
$$\begin{cases} 4x + 2y + z = -8 \\ y + z = 2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

B) Soit f la fonction définie sur \mathbb{C} par : $f(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c$ où a, b et c sont des réels .

1) Montrer que si $f(2) = 0$ et $f(1-i) = 0$ alors (a, b, c) est la solution du système (S) .

2) Dans la suite on prend : $f(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$.

a) Vérifier que pour tout nombre complexe Z , on a : $f(Z) = (Z-2)(Z^2 - 2Z + 2)$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(Z) = 0$.

C) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les point A et B d'affixes respectives : $Z_A = 2$ et $Z_B = 1 - i$.

1) Montrer que le triangle OAB est rectangle en B .

2) Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses .

a) Déterminer alors Z_C l'affixe du point C .

b) Montrer que $OBAC$ est un carré .

EXERCICE N : 2 (12 points)

A) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 - 3x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Interpréter graphiquement le résultat obtenu) .

b) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty; 0[$; $f(x) = x + 4 + \frac{4}{x-1}$.

c) Dédurre que la courbe (Cf) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote Δ .

2) Montre que f est continue en 2 .

3) a) Montrer que f est dérivable en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2 .

4) Calculer $f'(x)$ pour chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; 2[$.

B) Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans le repère orthonormé $\mathbf{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ une partie de la courbe (Cf) représentative de f .

1) Représenter Δ et les tangentes ou demi-tangentes aux points d'abscisses 0, $\frac{3}{2}$ et 2 .

2) Compléter le traçage de (Cf) ainsi que ses branches infinies .

C) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2; +\infty[$. On désigne par (Cg) sa courbe dans le repère \mathbf{R} .

1) Justifier que g est dérivable sur $]2; +\infty[$ et que : $g'(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 4}(x + \sqrt{x^2 - 4})}$.

2) Montrer que g est une bijection de $[2; +\infty[$ sur $[-2; 0[$.

3) Justifier que g^{-1} est dérivable sur $[-2; 0[$.

4) Tracer (Cg^{-1}) la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère \mathbf{R} .

5) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [-2; 0[$.

Nom et Prénom :

Annexe à rendre avec la copie

