

**Exercice n°1 : ( 6 points )**

Pour chaque question une seule réponse est exacte. La réponse est acceptée uniquement si elle est justifiée et correctement.

- Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, \frac{1}{4}[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{-x^2+\frac{x}{4}} + x$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{f(x)-1}{x} \right]$ 
  - est l'infini
  - est un réel
  - n'existe pas
- Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = \sqrt{|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  est :
  - $+\infty$
  - 1
  - 0
- $h(x) = (x-1)\sqrt{x-2} + 3$  admet une fonction réciproque  $k$  définie sur  $[3, +\infty[$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{k(x)-2}{x-3} \right]$  est :
  - 0
  - $\frac{3}{2}$
  - $+\infty$
- Soit  $u(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}$ . Dans  $]-\infty, 0[$ , l'équation :
  - $u(x) = 0$  admet une solution
  - $u(x) = -1$  n'a pas de solution
  - $u(x) = -\frac{1}{2}$  admet une solution
- Soit  $z$  un nombre complexe de module 2. Le nombre complexe  $Z = \bar{z} - \frac{1}{z}$  a pour module :
  - $\frac{1}{2}$
  - $\frac{3}{2}$
  - $\frac{5}{2}$
- Soit  $z$  un nombre complexe. Alors  $|z+i|$  est égal à :
  - $|z|+1$
  - $|z-1|$
  - $|i\bar{z}+1|$

**Exercice n°2 : ( 7 points )**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$  et  $(C_f)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2-2x+5})^3}$
  - Montrer que  $I(1,0)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ . Donner une équation de la tangente à  $(C_f)$  en  $I$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1 [$ . Construire les courbes  $(C_f)$  de  $f$  et  $(C_{f^{-1}})$  de  $f^{-1}$ .
- Montrer que  $\forall x \in ] -1, 1 [ : f^{-1}(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ .
  - Montrer que  $f^{-1}$  admet des primitives sur  $] -1, 1 [$ . Déterminer la primitive  $F$  de  $f^{-1}$  égale à 1 en 0.

**Exercice n°3 : ( 7 points )**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 2]$  et dérivable sur  $]0, 2[$ . On suppose que  $f(0) = 0, f(2) = 2$  et

$$\forall x \in ]0, 2[ : f'(x) = \frac{4}{\pi\sqrt{4-x^2}}.$$

- Montrer que  $f$  est bijective de  $[0, 2]$  sur  $[0, 2]$ .
- Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par :  $g(x) = f(2 \sin(x))$ 
  - Montrer que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : g(x) = \frac{4x}{\pi}$ .
  - En déduire  $f^{-1}(x), \forall x \in [0, 2]$ .
- Soit la fonction  $h$  définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  par :  $h(x) = f(2 \cos x) + f(2 \sin x)$ .  
Calculer  $h'(x), \forall x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ . En déduire que  $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : h(x) = 2$ .

**Bon travail**