L.Ibn Charaf Ennadhour	Devoir de synthèse n°1	A.S : 2011-2012
classe : 4 sc.inf .$_{1\ et\ 2}$	de mathématiques	Durée :2^{h}

Exercice n°1 (4 pts)

Pour chaque question ; trois affirmations sont proposées ; une et une seule est exacte l'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie .Aucune justification n'est demandée.

I) Soit n un entier naturel non nul et $A = 3^{4n} - 1$. Le reste de la division euclidienne de A par 5 est :

a) 0 b) 1 c) 2.

II) *L'équation : $186x + 20y = 3$ possède dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:*

a) Zéro solution *b) Une solution* *c) Une infinité de solutions*

III) *On donne le le tableau de variations d'une fonction f définie sur IR .*

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f(x)	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	2 ↘	1

1) *La droite D est une asymptote à la courbe représentative de f avec :*

a) D : x = 0 *b) D : x = 1* *c) D : y = 1*

2) *Le réel $f(-2)$ est*

a) Strictement positif *b) Strictement négatif* *c) nul .*

Exercice n° 2(5,5 pts)

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$.

1) a) *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n < 2$.*

b) *Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 2)^2}{4 - U_n}$.*

c) *En déduire que la suite (U_n) est croissante sur IN .*

d) *Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite l .*

2) *On considère la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \dfrac{1}{U_n - 2}$.*

a) *Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison $r = \dfrac{-1}{2}$; préciser son premier terme V_0*

b) *Exprimer V_n en fonction n puis U_n en fonction n .*

c) *Retrouver la limite l de la suite (U_n) .*

……………………………………. **voir suite au verso** ………………………………………… →

Exercice n°3 (4,5 pts)

On considère l'équation (E) : $5x - 4y = 1$ où x et y sont deux inconnues entières .

1) a) *Vérifier que $(1\ ;\ 1)$ est une solution particulière de (E).*

   b) *En déduire l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

2) *On donne les suites (U_n) et (V_n) qui sont définies sur IN par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = V_n + 4 \end{cases} .$$

a) *Justifier que (U_n) et (V_n) sont arithmétiques et préciser leurs raisons .*

b) *Exprimer U_n et V_n en fonction de n .*

c) *En déduire qu'on a : $U_p = V_q$ si et seulement si $5p - 4q = 1$.*

d) *Déterminer tous les couples $(p\ ;\ q)$ avec p et q entiers naturels inferieurs à 15 tels que $U_p = V_q$.*

Exercice n°4 (6 pts)

1) Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x) = x + \sin(x)$.

   a) Montrer que pour tout réel x on a : $x - 1 \leq g(x) \leq x + 1$.

   b) *En déduire* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2) *Soit la fonction f définie sur IR par* $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & si\ x > 0 \\ x^4 - x^3 + 2 & si\ x \leq 0 \end{cases}$

   et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

   a) *Montrer que f est continue en zéro . (on donne :* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ *).*

   b) *Montrer que pour tout $x > 0$ on a :* $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x}$.

   c) *En déduire* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *puis interpréter graphiquement le résultat .*

3) Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} gof(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} fog(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} fog(x)$.

Bon travail