Lycée Libre la Skhira	Devoir de synthèse n°01		
mercredi 3-12-2013	4 ème Info 1@2	Durée : 2 heures	Saem Mongi

Exercice 1 : (6,5 points)

1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $iz^2 + 3(1-i)z - 4 = 0$.

2) *Soit dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* (E) : $iz^3 + (3-5i)z^2 - 2(5-3i)z + 8 = 0$.

a) *Montrer que* 2 *est solution de* (E).

b) *Trouver les nombres complexes a, b et c tels que :*

$$iz^3 + (3-5i)z^2 - 2(5-3i)z + 8 = (z-2)(az^2 + bz + c)$$

c) *En déduire les solutions de* (E).

3) *Dans le plan complexe muni d'un R.O.N* $(O, \vec{u}, \vec{v})$*; on considère les points* A, B *et* C *d'affixes respectives* $z_A = 2$, $z_B = 1+i$ *et* $z_C = 2+2i$.

a) *Placer les points A, B, et C dans* $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) *Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.*

EXERCICE N°2 : (6 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{U_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) a – Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $1 \leq U_n \leq 2$.

b – Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c – En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite .

2) a – Vérifier que : $2 - U_{n+1} = \dfrac{1}{U_n + 1}(2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b – En déduire que : $2 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(2 - U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c – Montrer par récurrence que : $2 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (2 - U_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d – Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice N°4 :(6pts)

La figure suivante est la courbe $(\mathcal{C}_f)$ *d'une fonction* f *dans un repère orthonormé* $(0;\vec{i};\vec{j})$

La droite Δ *est une asymptote au voisinage de* $+\infty$ *à la courbe* $(\mathcal{C}_f)$;

Δ *passant par les points* $A(1;0)$ *et* $B(4;3)$

La droite $\mathcal{D} : x = 1$ *est une asymptote verticale à* $(\mathcal{C}_f)$

1) *Déterminer* D_f

2) *Calculer* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

3) a) *Montrer que l'équation de l'asymptote* Δ *est* $y = x - 1$

b) *En déduire* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

4) *Dresser le tableau de variation de* f

5) *Déterminer le signe de* $f(x)$

6) *Soit la fonction* g *définie par* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$. *Déterminer* D_g *et calculer* $\lim_{x\to 0^+} g \circ f(x)$