Date :10/12/2014 **Devoir de synthèse N°1** **Niveau : 4ème info**

Nombre de pages : 2 Durée : **2h**

MATHEMATIQUES

N.B : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.

EXERCICE N° 1(3 pts)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est juste. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie (aucune justification n'est demandée) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

1) Soit z un nombre complexe , $|z-2|$ est égal à :

a. $|z|+2$ **b.** $|\bar{z}+2|$ **c.** $|\bar{z}-2|$.

2) Si A est B sont les points dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $250z^2 - 1000iz + 1014-11015i = 0$, alors le milieu de [AB] est :

a. K(0 ;2) **b.** K(2 ;0) **c.** K(0 ;-2) .

3) L'ensemble des points M(z) tel que $|z| = |\bar{z}-2i|$ est :

a. la droite y=1 **b.** la droite y=-1 **c.** le cercle de centre O et de rayon 2

EXERCICE N° 2 (6 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et ζ sa courbe dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.On admet que f est strictement croissante sur IR.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement .

b) Déterminer f(IR).

2) Montrer que le point I(0 ;1) est un point de ζ et qu'il est un centre de symétrie de ζ .

3)a) Montrer que la fonction définie par g(x) = f(x) + x est strictement croissante sur IR.

b) En déduire que l'équation f(x) = -x admet dans IR une solution unique α , puis que $-1 \prec \alpha \prec 0$.

c) Vérifier que $\sqrt{1+\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$.

4) Montrer que les droites Δ : y = x et Δ' : y = x+2 sont deux asymptotes obliques à la courbe ζ' de la fonction g.

EXERCICE N° 3 (5 pts)

On considère la suite définie sur IN* par : $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{2n}.u_n \end{cases}$.

1) Calculer u_2 et u_3.

2) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $u_n \succ 0$.

b) Montrer que la suite (Un) est décroissante.

c) En déduire que (Un) est convergente.

3) Soit la suite (Vn) définie sur IN* par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

a) Montrer que (Vn) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$; $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

EXERCICE N° 4 (6 pts)

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $2^{3n}-1$ est divisible par 7. (on pourra raisonner par récurrence)

b) En déduire que $2^{3n+1}-2$ est divisible par 7 et que $2^{3n+2}-4$ est divisible par 7 .

2) Soit p un entier naturel , donner le reste de la division euclidienne de 2^p par 7 dans les trois cas suivant :

a) p=3n ; $n \in$ IN

b) p=3n+1; $n \in$ IN

c) p=3n+2 ; $n \in$ IN

3) Soit $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$. Montrer que A_p est divisible par 7 si et seulement si p= 3n+1 ou p =3n+2 ; $n \in$ IN.

4) Soit a = 1000100010000 écrit dans le système binaire (base 2).

a) Montrer que dans la base 10 a s'écrit sous la forme A_p.

b) En déduire que a est divisible par 7.